1. Чи є дана нерівність правильною?

1) $3 > \frac{20}{7}$;   3) $\frac{5}{2} \geq 2{,}5$;   5) $\frac{18}{7} \geq 3$;

2) $\frac{5}{3} > 2$;   4) $4 \leq \frac{41}{8}$;   6) $\frac{18}{7} \geq 2$?

Відповідь:

1) так; 2) ні;   3) так;   4) так;   5) ні;   6) так.

2. Оберіть правильні числові нерівності:

1) $\frac{3}{8} > -1$;   3) $1\frac{6}{7} \leq \frac{13}{7}$;   5) $-\frac{4}{3} < -\frac{4}{5}$;

2) $\frac{4}{3} < \frac{4}{5}$;   4) $-\frac{3}{8} > -\frac{8}{3}$;   6) $1\frac{2}{7} \geq \frac{11}{7}$?

Відповідь. Правильні числові нерівності: 1); 3); 4); 5).

3. Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $a - b = -0{,}3$;	4) $b - a = 0$;	7) $b - a = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$;
2) $a - b = 0{,}11$;	5) $a - b = (-0{,}5)^2$;	8) $a = 3{,}9 + b$;
3) $b - a = -0{,}5$;	6) $b - a = (-1)^2$;	9) $b = a - 7$.

Відповідь:

1) $a < b$;	4) $a = b$;	7) $a > b$;
2) $a > b$;	5) $a > b$;	8) $a > b$;
3) $a > b$;	6) $a < b$;	9) $a > b$;

4. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

1) $(a - 8)(a + 7) > (a + 10)(a - 11)$.

Доведення: $a > b$, якщо $a - b > 0$.

$(a - 8)(a + 7) - (a + 10)(a - 11) = a^2 + 7a - 8a - a^2 + 11a - 10a + 110 = 54$;

$54 > 0$. Отже, $(a - 8)(a + 7) > (a + 10)(a - 11)$ для будь-якого значення a.

5) $(a - 6)^2 - 2 < (a - 5)(a - 7)$.

Доведення: $a < b$, якщо $a - b < 0$.

$(a - 6)^2 - 2 - (a - 5)(a - 7) = a^2 - 12a + 36 - 2 - a^2 + 5a + 7a - 35 = -1$;

$-1 < 0$. Отже, $(a - 6)^2 - 2 < (a - 5)(a - 7)$ для будь-якого значення a.

6) $(2a - 5)(2a + 5) - (3a - 2)^2 \leq 3(4a - 9) - 2$.

Доведення: $a \le b$, якщо $a – b \le 0$.

$(2a – 5)(2a + 5) – (3a – 2)^2 – 3(4a – 9) – 2 = 4a^2 – 25 – 9a^2 + 12a – 4 – 12a + 27 +$

$+ 2 = –5a^2$; $–5a^2 \le 0$ для будь-якого значення а.

Отже, $(2a – 5)(2a + 5) – (3a – 2)^2 \le 3(4a – 9) – 2$ для будь-якого значення а.

7) $a^2 + 4 \ge 4a$.

Доведення: $a \ge b$, якщо $a – b \ge 0$.

$a^2 + 4 – 4a = (a – 2)^2$; $(a – 2)^2 \ge 0$ для будь-якого значення а.

Отже, $a^2 + 4 \ge 4a$ для будь-якого значення а.

8) $8m^2 – 6m – 1 \le (3m – 1)^2$ для будь-якого значення а.

Доведення: $a \le b$, якщо $a – b \le 0$.

$8m^2 – 6m + 1 – (3m – 1)^2 = 8m^2 – 6m + 1 – 9m^2 + 6m – 1 = – m^2$; $– m^2 < 0$.

Отже, $8m^2 – 6m – 1 \le (3m – 1)^2$.

9) $a(a – 1)(a + 1) > – 1 – a(1 – a^2)$.

Доведення: $a > b$, якщо $a – b > 0$.

$a(a – 1)(a + 1) – (– 1 – a(1 – a^2)) = a(a^2 – 1) + 1 + a(1 – a^2) =$

$= a(a^2 – 1) – 1 – a(a^2 – 1) = 1$; $1> 0$.

Отже, $a(a – 1)(a + 1) > – 1 – a(1 – a^2)$

5. Доведіть нерівність:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$; 2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$; 3) $a(a - 3) > 5(a - 4)$

Доведення: $a > b$, якщо $a – b > 0$.

1) $2a^2 – 8a + 16 = 2(a^2 – 4a + 4 + 4) = 2((a – 2)^2 + 4) > 0$, тому, що $(a – 2)^2 \ge 0$,

$(a – 2)^2 + 4 > 0$. Отже, $2a^2 – 8a + 16 > 0$.

2) $4b^2 + 4b + 3 = (2b)^2 + 2\cdot2b + 1 + 2 = (2b + 1)^2 + 2 > 0$. Отже, $4b^2 + 4b + 3 > 0$.

3) $a(a – 3) – 5(a – 4) = a^2 – 3a – 5a + 20 = a^2 – 8a + 20 = a^2 – 2\cdot4\cdot a + 16 + 4 =$

$= (a – 4)^2 + 4 > 0$, тому , що $(a – 4)^2 > 0$, $4>0$. Отже, $a(a - 3) > 5(a - 4)$

6. Доведіть, що:

1) $x^2 - 10xy + 26y^2 + 12y + 40 > 0$ при всіх дійсних значеннях x і y;

2) $x^2 + 4y^2 + 6x + 4y + 10 \ge 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.

Доведення:

1) $x^2 - 10xy + 26y^2 + 12y + 40 = (x^2 - 2\cdot x\cdot 5y + 25y^2) + (y^2 + 2\cdot y\cdot 6 + 36) + 4 =$

$= (x - 5)^2 + (y + 6)^2 + 4 > 0$, тому, що $(x - 5)^2 > 0$, $(y + 6)^2 > 0$.

Отже, $x^2 - 10xy + 26y^2 + 12y + 40 > 0$ при всіх дійсних значеннях x і y;

2) $x^2 + 4y^2 + 6x + 4y + 10 = (x^2 + 6x) + (4y^2 + 4y) + 10 =$

$= (x^2 + 6x + 9) - 9 + (4y^2 + 4y + 1) - 1 + 10 = (x + 3)^2 + (2y + 1)^2 > 0$, тому, що

$(x + 3)^2 \geq 0$, $(2y + 1)^2 > 0$.

Отже, $x^2 + 4y^2 + 6x + 4y + 10 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y

7. Дано три послідовних числа. Порівняйте подвоєний квадрат середнього з цих чисел і суму квадратів двох інших.

Дано: $a + 1$; $a +2$; $a + 3$.

Порівняти: $2\cdot(a + 2)^2$ та $((a + 1)^2 + (a + 3)^2)$.

$2\cdot(a + 2)^2 - ((a + 1)^2 + (a + 3)^2) = 2a^2 + 8a + 8 - a^2 - 2a - 1 - a^2 - 6a - 9 = - 1$;

$- 1< 0$. Отже, $2\cdot(a + 2)^2 < ((a + 1)^2 + (a + 3)^2)$.