

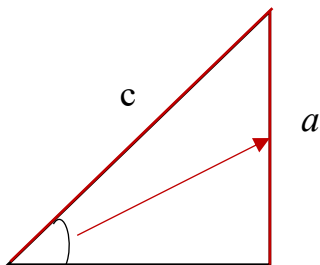
Конспект до уроку 3

Вступ

Синус і косинус — «зручні відношення» у прямокутному трикутнику, що дозволяють швидко знаходити висоти/довжини без прямих вимірювань (приклад із дахом: знаючи гіпотенузу й кут, обчислюємо висоту та основу). Ці відношення використовують інженери, будівельники, пілоти тощо.

Означення

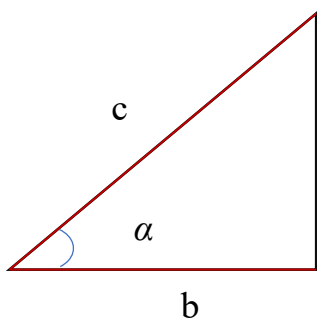
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.



$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

Оскільки, у прямокутному трикутнику катет менший за гіпотенузу, то для будь-якого гострого кута

$$\sin \alpha < 1$$

$$\cos \alpha < 1$$

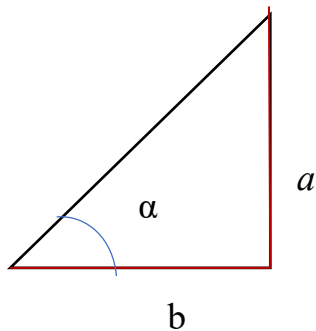
Задача

1. Яке з наведених чисел може бути числовим значенням синуса і косинуса *гострого* кута прямокутного трикутника:

1; 0,5; $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$, 0, - 0,3

Відповідь: 0,5; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{4}$

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$$

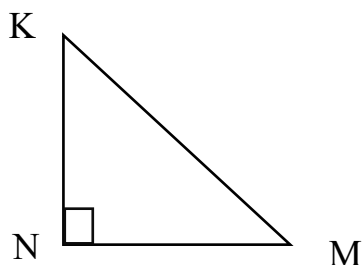
Оскільки катет може бути і більшим, і меншим від іншого катета, або дорівнювати йому, то може бути і більшим за 1 і меншим за 1, і дорівнювати 1

Мнемоніка (Для швидкого запам'ятовування)

- **sin**: «Сонце — ПРОмінь Край Гори» → ПРОтилежний Катет / Гіпотенуза.
- **cos**: «Кораблі ПРИ Калинових Гаванях» → ПРИлеглий Катет / Гіпотенуза.
- **tg**: «Тюлень ПРОплив Казкове ПРИбережжя» → ПРОтилежний / ПРИлеглий.

Задача

1. Знайди відповідність тригонометричної функції і співвідношення сторін прямокутного трикутника



1) $\sin \angle K$

A. $\frac{KN}{KM}$

2) $\cos \angle K$

Б. $\frac{MN}{KM}$

3) $\operatorname{tg} \angle K$

В. $\frac{KN}{NM}$

Г. $\frac{MN}{KN}$

Д. $\frac{KM}{KN}$

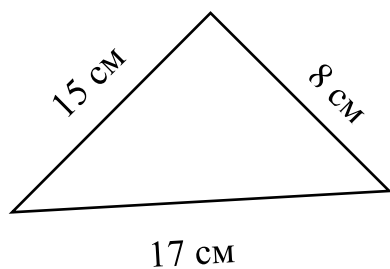
Відповідь: 1) Б

2) А

3) Г

2. Обчисли синус, косинус та тангенс кута α прямокутного трикутника

а)



$\sin \alpha =$

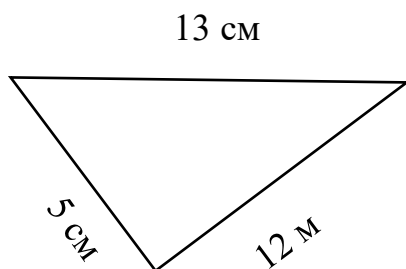
$\cos \alpha =$

$\operatorname{tg} \alpha =$

Відповідь: $\sin \alpha = \frac{15}{17}$

$\cos \alpha = \frac{8}{17}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$



б)

$$\sin \alpha =$$

$$\cos \alpha =$$

$$\operatorname{tg} \alpha =$$

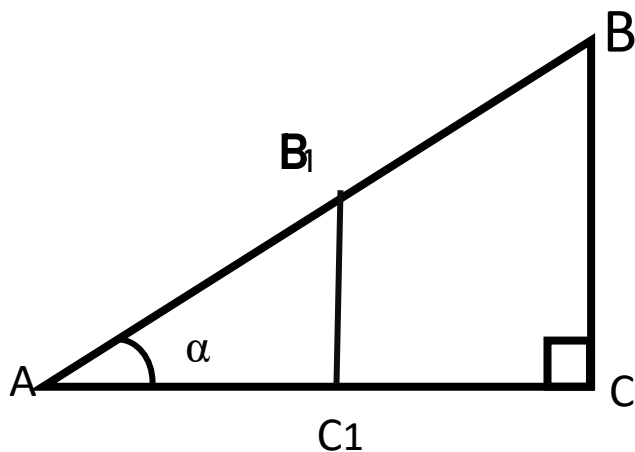
Відповідь : $\sin \alpha = \frac{12}{13}$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$$

Чи зміниться значення синуса якщо взяти трикутник з меншими сторонами, але тим самим кутом?

Перевіримо.



Розглянемо $\triangle ABC$ з катетами 6 см і 8 см.

Оскільки 6, 8, 10 – піфагорова трійка, тоді гіпотенуза $AB = 10$ см

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \sin \alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

Проведемо середню лінію B_1C_1 (B_1 – середина AB , C_1 – середина AC)

Середня лінія з'єднує середини двох сторін трикутника, паралельна третій стороні і дорівнює її половині

$$B_1C_1 = \frac{1}{2}BC = 3\text{см}$$
$$AB_1 = \frac{1}{2}AB = 5\text{см}$$

Знайдемо тепер $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{B_1C_1}{AB_1}, \sin\alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

І ми отримали подібні трикутники, $\angle A$ у трикутників спільний.

Отже, значення $\sin\alpha$ не змінилось

Точно! У подібних трикутників відношення сторін рівні, тобто

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$$

А це і є $\sin\alpha$. І який висновок можемо зробити?

Синус трикутника не залежить від розмірів трикутника, а залежить від градусної кута. І не тільки синус.

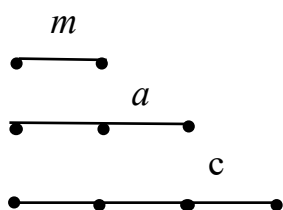
А і синус, і косинус, і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежить ТІЛЬКИ від градусної міри кута трикутника і не залежить від його розміру.

Задача

Побудуй гострий кут α , синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$

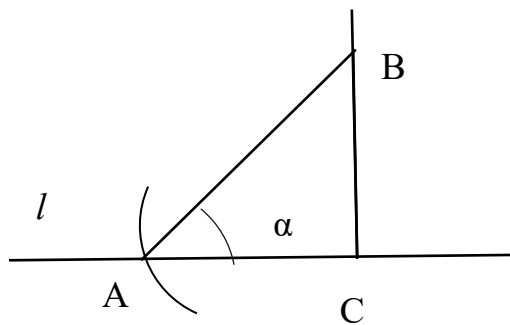
Розв'язання

Щоб побудувати кут, достатньо побудувати прямокутний трикутник, у якого відношення протилежного йому катета до гіпотенузи дорівнює $\frac{2}{3}$



Побудова

1. Креслимо довільний відрізок m та два відрізки a і c такі, що $a = 2m$ і $c = 3m$



2. Проводимо довільну пряму l , позначаємо на ній точку C ; проводимо через точку C

пряму n , перпендикулярну до прямої l , і відкладаємо на ній відрізок $BC = a$

3. Описуємо коло із центром у точці B , радіус якого дорівнює c ; точку перетину кола і прямої l позначаємо через A

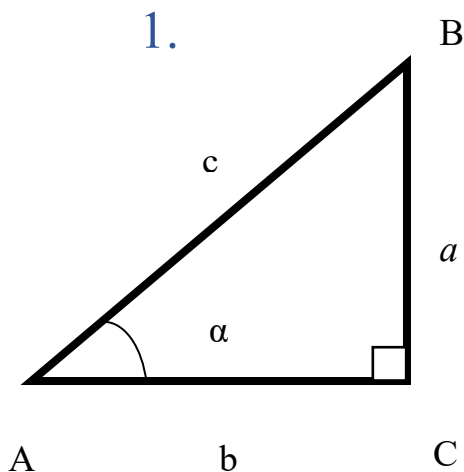
4. Проводимо відрізок BA . Кут BAC –

шуканий.

Основні тригонометричні тотожності

- А чи можна, знаючи синус гострого кута, знайти косинус і тангенс цього кута?

- Є співвідношення, які виражають залежність між тригонометричними функціями одного кута.



За означенням

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

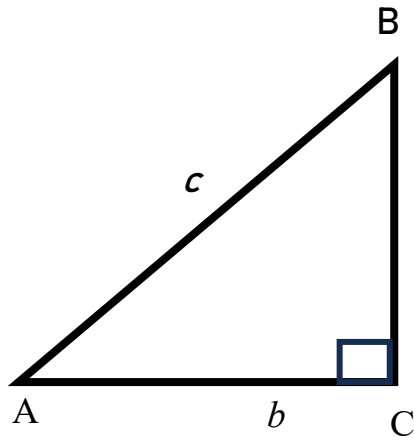
Отже,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

2. Для будь-якого гострого $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (основна тригонометрична тотожність)

За теоремою Піфагора $a^2 + b^2 = c^2 \mid \div c^2$

(поділимо обидві частини на c^2)



Маємо:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Для будь-якого гострого кута

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

3.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Поділимо обидві частини на $\cos^2 \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \mid \div \cos^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Отже,

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Задача 1.

Знайди $\cos \alpha$ та $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$.

Розв'язання

Нехай для гострого кута α , $\sin \alpha = 0,8$

Тоді $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}$

Відповідь: $\cos \alpha = 0,6$; $\operatorname{tg} \alpha = 1 \frac{1}{3}$

Задача 2.

Спрости вираз:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Висновки

✓ $\sin \alpha = \frac{\text{протилежний}}{\text{гіпотенуза}}$

✓ $\cos \alpha = \frac{\text{прилеглий}}{\text{гіпотенуза}}$

✓ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{протилежний}}{\text{прилеглий}}$

✓ Значення **sin**, **cos**, **tg** залежать **лише** від градусної міри кута, а не від розмірів трикутника.

✓ Виконується основна тригонометрична тотожність

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

✓ Для запам'ятовування — мнемоніки

sin: «Сонце — ПРОмінь Край Гори» → ПРОтилежний Катет / Гіпотенуза.

cos: «Кораблі ПРИ Калинових Гаванях» → ПРИлеглий Катет / Гіпотенуза.

tg: «Тюлень ПРОплив Казкове ПРИбережжя» → ПРОтилежний / ПРИлеглий