

Урок 3. Система лінійних рівнянь з двома змінними.

Розглянемо дві задачі:

1. Шоколадний батончик та плитка шоколаду коштують 32 грн. Скільки може коштувати батончик, а скільки плитка шоколаду?

Позначимо x грн – ціна плитки шоколаду, а y грн. – ціна батончику.

$$x + y = 32.$$

Існує багато розв'язків цієї задачі: 17 грн та 15 грн; 22 грн та 10 грн; 20 грн та 12 грн, тощо.

2. Шоколадка коштує на 12 грн дорожче ніж батончик. Скільки коштували батончик, а скільки плитка шоколаду?

$$x - y = 12$$

Теж багато розв'язків: 26 грн та 14 грн, 22 грн та 10 грн, 28 грн та 16 грн, тощо.

Але якщо об'єднати ці дві задачі, то одержимо задачу в якій треба знайти скільки коштує шоколадка і скільки батончик, якщо виконуються обидві умови, тобто нам треба знайти два числа які в сумі давали 32 і відрізнялись один від одного на 12.

З першої задачі маємо рівняння

$$x + y = 32$$

А з другої

$$x - y = 12$$

Ми склали два лінійних рівняння з двома змінними.

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти такі значення змінних, які задовольняють водночас і перше, і друге рівняння, тобто знайти спільний розв'язок цих рівнянь.

Щоб показати що рівняння повинні мати спільний розв'язок їх об'єднують фігурною дужкою

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

Розв'язком задачі є спільний розв'язок рівнянь 22грн та 10грн.

Задачу розв'язали вибором спільного розв'язку серед перелічених, а це незручно.

def. Якщо необхідно знайти спільний розв'язок кількох рівнянь, то це означає, що потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ де } a, b, c, a_2, b_2, c_2 - \text{ задані числа.}$$

x, y – змінні

def. Розв'язати системи рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

def. Пару значень змінних $(x; y)$, що перетворює кожне рівняння в правильну числову рівність називають розв'язком системи рівнянь з двома змінними.

Наприклад 1, перевіримо, чи буде пара чисел $x = -1$ та $y = 3$ розв'язком системи:

$$\begin{cases} 3x + y = 0, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(-1) + 3 = 0, \\ -1 + 2 * 3 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0. \\ 5 = 5. \end{cases}$$

Одержали істинні рівності, отже пара чисел $(-1; 3)$ є розв'язком даної системи рівнянь.

? Як же розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними?

Для розв'язування системи лінійних рівнянь можна скористатися **графічним способом**. Для того, щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь графічним способом, **потрібно побудувати в одній системі координат графіки обох рівнянь системи та знайти координати точок їх перетину**.

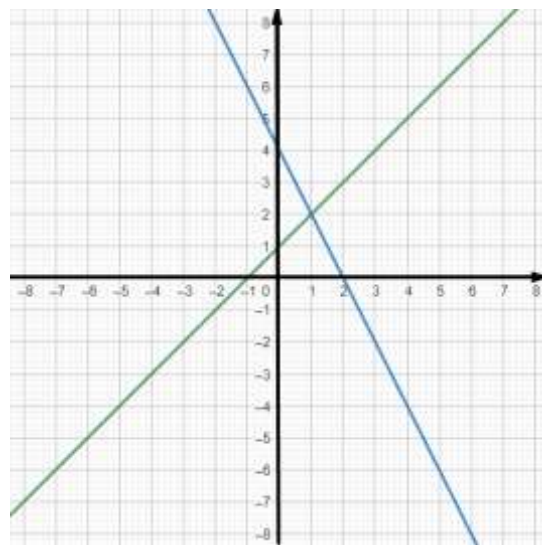
Наприклад 2.

1) Розв'яжіть систему двох лінійних рівнянь графічним способом.

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

x	0	-1
y	1	0

x	0	2
y	4	0



Координати точки перетину (1; 2). Отже розв'язок системи рівнянь з двома змінними є пара чисел (1; 2).

2) Розв'яжіть графічно систему двох лінійних рівнянь.

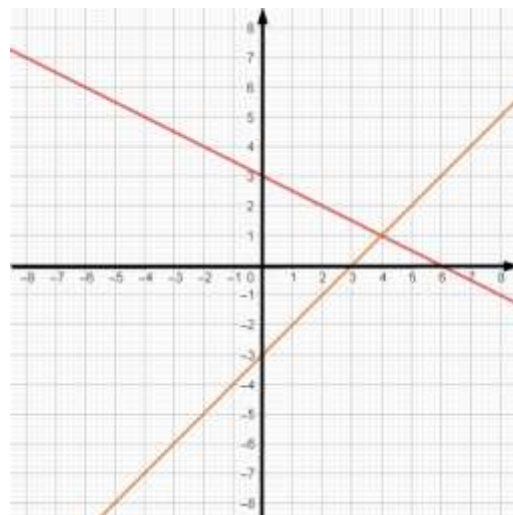
$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x - y = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 6 - x, \\ -y = 6 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 0,5x, \\ y = x - 3. \end{cases}$$

x	2	4
y	2	1

x	2	1
y	-1	-2



Координати точки перетину (4;1). Отже, розв'язок системи рівнянь з двома змінними є пара чисел (4;1).



На площині можливі *три випадки взаємного розташування* двох

прямих – графіків двох лінійних рівнянь:

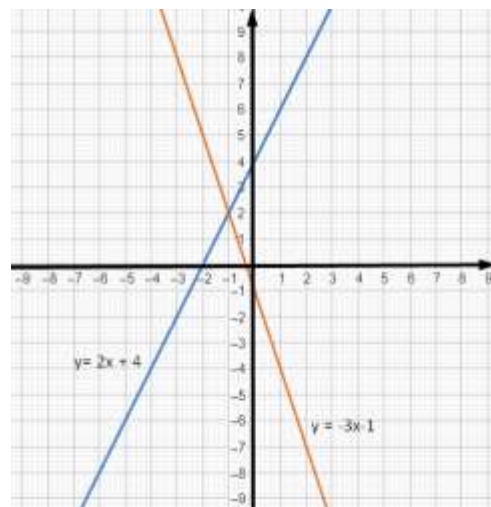
1. *Прямі перетинаються*, отже мають одну спільну точку. Система має *один розв'язок*.
2. *Прямі паралельні*, тобто не мають спільної точки. Система немає *жодного розв'язку*.
3. *Прямі співпадають*. Система має *безліч розв'язків*.

Наприклад 3,

$$1) \begin{cases} 2x - y = -4, \\ 3x + y = -1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 2x + 4, \\ y = -3x - 1. \end{cases}$$

x	1	0
y	6	4

x	-1	-2
y	2	5



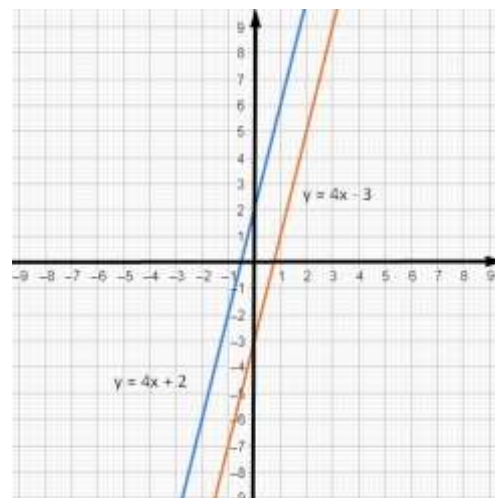
Прямі перетинаються. Отже, один розв'язок.

Відповідь: $(-1; 2)$

$$2) \begin{cases} 4x - y = -2, \\ 4x - y = 3; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 4x + 2, \\ y = 4x - 3. \end{cases}$$

x	1	-1
y	6	-2

x	1	2
y	1	5

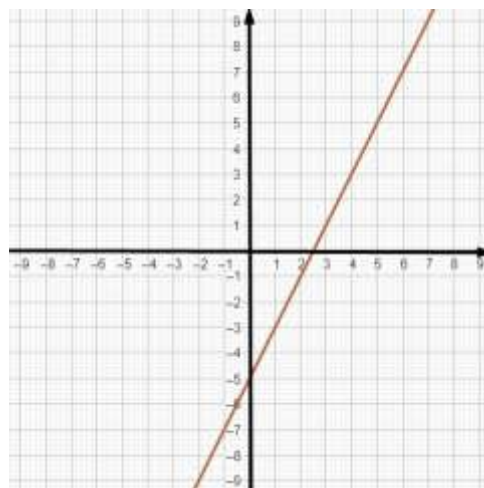


Прямі паралельні, тобто не перетинаються. Отже,
система розв'язків немає.

$$3) \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 4x - 2y = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = y, \\ 4x - 10 = 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = y, \\ \frac{4x - 10}{2} = y. \end{cases}$$



x	4	0
y	3	5

x	4	0
y	3	5

Прямі співпадають. Отже, система має безліч розв'язків

?

Чи можна з'ясувати кількість розв'язків системи, не розв'язуючи її?

Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ де всі коефіцієнти } a, b, c, a_2, b_2, c_2 \text{ – задані числа, відмінні}$$

від нуля.

Тоді система:

а) має *один розв'язок*, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

б) *не має розв'язків*, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

в) має *безліч розв'язків*, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

Наприклад 4,

З'ясуй кількість розв'язків поданої системи рівнянь.

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - y = 3, \\ 3x + 2y = 1. \end{cases}$$

Оскільки виконується умова $\frac{4}{3} \neq \frac{-1}{2}$, то система має один розв'язок.

$$\text{б) } \begin{cases} -4x + 7y = 5 \\ 8x - 14y = -10 \end{cases}$$

Оскільки виконується умова $\frac{-4}{8} = \frac{7}{-14} = \frac{5}{-10}$, то система має безліч розв'язків.

$$\text{в) } \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -6x + 4y = -9 \end{cases}$$

Оскільки виконується умова $\frac{3}{-6} = \frac{2}{4} \neq \frac{7}{-9}$, то система не має розв'язків.

Розв'яжемо разом

Завдання 1. При якому значенні система двох лінійних рівнянь не має розв'язків.

$$\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Система не має розв'язків, якщо

$$\frac{3}{1} = \frac{a}{2} \neq \frac{5}{3}$$

Отже, умова $\frac{3}{1} = \frac{a}{2}$ виконується про $a = 6$.

Перевіримо $\frac{6}{2} \neq \frac{5}{3}$.

Відповідь: $a=6$.

Завдання 2

Задача. Приймаючи участь у розкопках гурток юних археологів «Акінак» розкопали 9 предметів старовини. Стародавніх прикрас знайшли на 3 більше ніж посуду. Скільки предметів кожного виду було знайдено?

Розв'язання

Позначимо кількість прикрас – x предметів, а посуду – y предметів.

Всього знайшли $(x + y)$ знахідок, що за умовою задачі дорівнює 9 предметів.

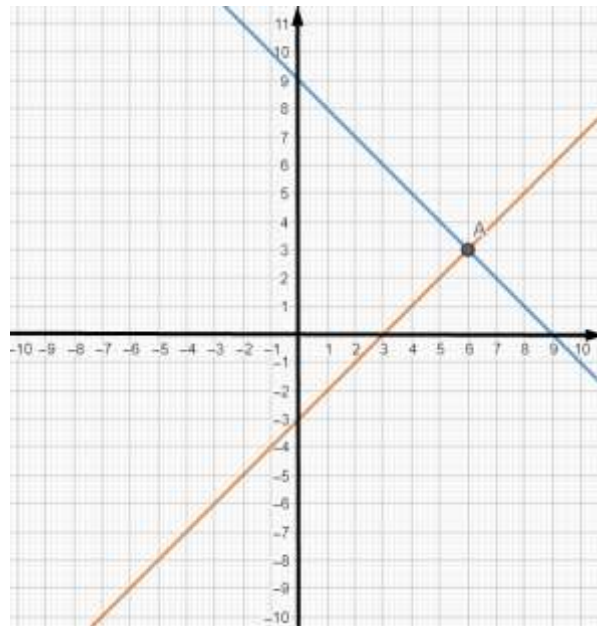
Прикрас більше за предмети посуду на $(x - y)$ знахідок, що за умовою задачі дорівнює 3 прикрас. Маємо:

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему графічно.

x	0	9
y	9	0

x	0	3
y	-3	0



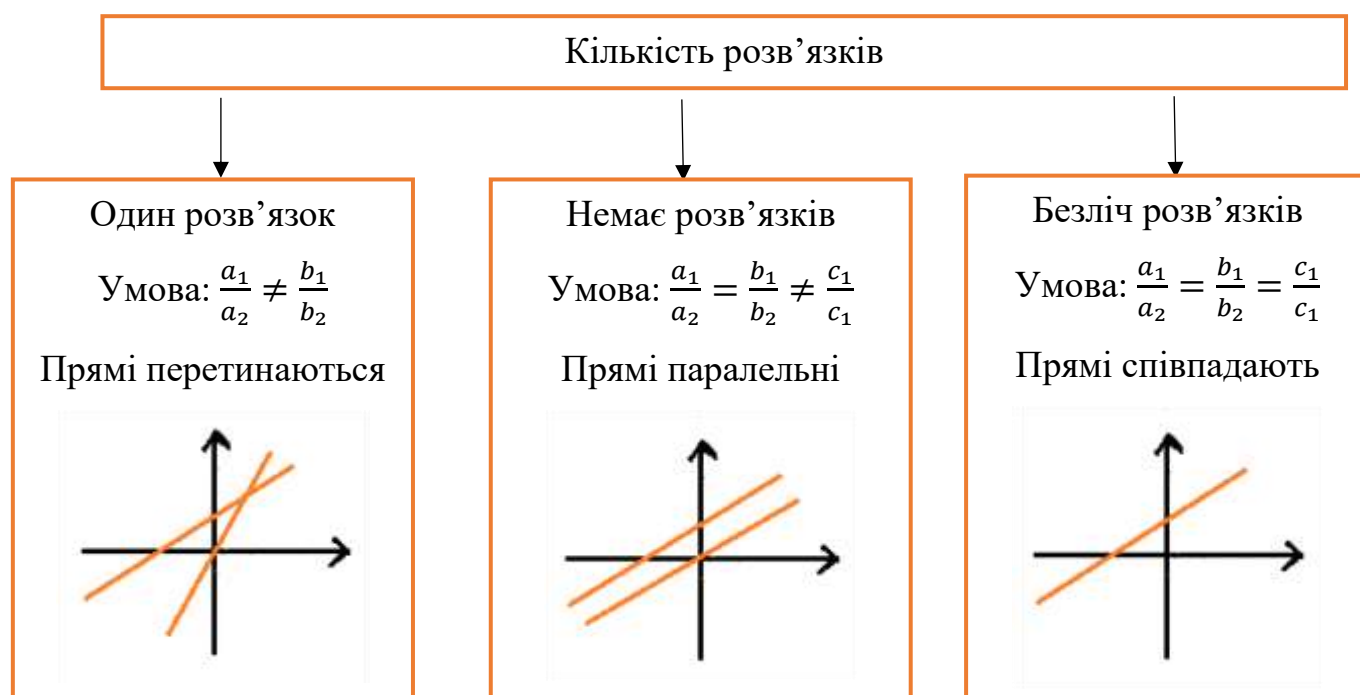
Графіки перетинаються в точці $(6; 3)$. Отже, розв'язок системи $(6; 3)$.

Відповідь: 6 прикрас, 3 побутових приладдя.

Отже,

1. Якщо необхідно знайти спільний розв'язок кількох рівнянь, то це означає, що потрібно розв'язати *систему рівнянь*.
2. Розв'язати системи рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

3. Пару значень змінних $(x; y)$, що перетворює кожне рівняння в правильну числову рівність називають *розв'язком* системи рівнянь з двома змінними.
4. Можливі *три випадки* взаємного розташування двох прямих – графіків двох лінійних рівнянь, від чого залежить кількість розв'язків системи



**Алгоритм розв'язування системи двох лінійних рівнянь
графічним способом**

1. Побудуйте в одній системі координат графіки обох рівнянь системи.
2. Знайдіть координати точок їх перетину (якщо вони є).
3. Запишіть відповідь.