

Урок 1. Лінійні рівняння з двома змінними

Для вивчення теми «Система лінійних рівнянь з двома змінними» спочатку необхідно розібратися, що таке лінійне рівняння з двома змінними та його графік.

Для цього розглянемо задачу.

Для озеленіння та збагачення краси проспекту Гагаріна в місті Харкові було посаджено 70 дерев сакури та магнолії. Скільки дерев кожного виду було посаджено у Харкові.

Пояснення. Позначимо кількість дерев сакури через x , а кількість дерев магнолії – y . Всього посадили $(x + y)$ дерев, що за умовою задачі дорівнює 70.

Одержуємо рівняння: $x + y = 70$.

Маємо проблему: В РІВНЯННІ ДВА НЕВІДОМИХ.

Розв'язати таке рівняння звичайним способом ми не можемо, але можемо підібрати кілька пар таких чисел, які у сумі дають 70:

13 і 57; 42 і 28; 60 і 10 тощо.

Виникають питання:



- Що за рівняння ми одержимо?
- Як розв'язати це рівняння?
- Скільки розв'язків має рівняння?

def. Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x та y – змінні, a , b , c – числа (a , b – коефіцієнти при змінних, c – вільний член.)

Наприклад, $2x - 3y = 6$; $-4x + \frac{2}{3}y = 1\frac{1}{2}$

def. Розв'язком рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, за яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Наприклад, пара чисел $x = -1$ і $y = 9$ задовольняє рівнянню

$$5x + 3y = 22, \text{ оскільки}$$

$$5(-1) + 3 \cdot 9 = 22.$$

$$22 = 22 - \text{істинна рівність,}$$

Скорочено розв'язок записуючи $(-1; 9)$, на I місці знаходиться x , а на II – y .

А пара чисел $x = 1$ і $y = 2$ це рівняння не задовольняє, оскільки

$$5 * 1 + 3 * 2 = 11$$

$11 \neq 22$ – не є істинною рівністю.



- Як розв'язати рівняння з двома змінними?

Щоб знайти розв'язок лінійного рівняння з двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і розв'язавши одержане рівняння з однією змінною, знайти відповідне значення іншої змінної.

Наприклад. $3x - 5y = 1$

Нехай $x = 7$, то $3 * 7 - 5y = 1$

$$21 - 5y = 1$$

$$-5y = -20$$

$$y = 4$$

Отже, $(7; 4)$ – розв'язок.

Нехай $x = -3$, то $3 * (-3) - 5y = 1$

$$-9 - 5y = 1$$

$$-5y = 10$$

$$y = -2$$

Отже, $(-3; -2)$ – розв'язок.

Ми знайшли 2 розв'язки. Але $(7; 4)$, $(-3; -2)$ – не вичерпують всіх розв'язків. Надаючи змінній x інших значень одержимо різні розв'язки рівняння, отже рівняння $3x - 5y = 1$ має **безліч розв'язків**.

Залежно від того, яких значень набувають коефіцієнти a , b і c , лінійне рівняння з двома змінними $ax + by = c$ може мати розв'язки або не мати їх.

Рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків лише тоді, коли $a = 0$, $b = 0$, а вільний член $c \neq 0$. Тобто, $0x + 0y = c$, а не існує такої пари значень x і y , яка б не задовольняла це рівняння.

В усіх інших випадках рівняння $ax + by = c$ має безліч розв'язків.

Лише тоді, коли $a \neq 0$, $b \neq 0$, значення x і y залежить один від одного, тобто

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ або } x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

Рівняння $ax + by = c$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називається рівнянням I степеня з двома змінними, має безліч розв'язків.

Якщо хоча б один із коефіцієнтів дорівнює 0, тоді відповідно або y набуває лише одного числового значення, або x набуває будь-яких значень, якщо $a = 0$, то $y = -\frac{c}{b}$, x – будь-яке число; якщо $b = 0$, то $x = -\frac{c}{a}$, y – будь-яке число.

Якщо всі три коефіцієнти рівняння $ax + by + c = 0$ дорівнюють 0, то це рівняння задовольняє будь-яка пара чисел і таких пар – безліч.

! Взагалі, лінійне рівняння із двома змінними або має безліч розв'язків, або не має жодного.

def. Рівняння з двома змінними називають рівносильними, якщо вони мають одні і ті ж розв'язки або обидва рівняння не мають розв'язків.

Властивості рівнянь з двома змінними такі ж, як і властивості рівняння з однією змінною, а саме, **якщо**:

- 1) в рівнянні розкрити дужки і звести подібні доданки,
- 2) до обох частин рівняння додати (або відняти від них) той самий вираз
- 3) члени рівняння перенести з однієї частини в іншу, змінивши при цьому їх знаки на протилежні,
- 4) обидві частини рівняння помножити (або розділити на одне й те ж саме відмінне від нуля число),

то одержимо рівняння рівносильне даному.

? - Як розв'язати рівняння з двома змінними?

Розглянемо рівняння $5x + 4y = 16$.

Використовуючи властивості рівнянь, виразимо одну змінну через іншу.

$$4y = 16 - 5x \quad | \div 4$$

$$y = \frac{16 - 5x}{4}$$

$$y = 4 - \frac{5}{4}x$$

Надаючи змінній x різних значень можна знайти відповідні значення y .

$$x = 4, \text{ то } y = 4 - \frac{5 * 4}{4 * 1} = 4 - 5 = -1$$

$$x = 8, \text{ то } y = 4 - \frac{5 * 8}{4 * 1} = 4 - 10 = -6$$

$$x = -4, \text{ то } y = 4 - \frac{5}{4}(-4) = 4 + \frac{5 * 4}{4 * 1} = 9$$

Отже, $(4; -1); (8; -6); (-4; 9)$ – розв’язки рівняння.

Розв’яжемо разом

Завдання 1.

Які з пар чисел $(4; 1); (8; 2)$ є розв’язком рівняння $3x + 4y = 16$?

Оскільки $(4; 1)$ – розв’язок рівняння, то $x = 4, y = 1$, задовольняє рівняння

Підставимо:

$$3 * 4 + 4 * 1 = 16$$

$$12 + 4 = 16$$

$16 = 16$ – істинна рівність, отже $(4; 1)$ – розв’язок рівняння.

Оскільки $(8; 2)$ – розв’язок рівняння, то $x = 8, y = 2$, задовольняє рівняння

Підставимо:

$$3 * 8 + 4 * 2 = 16$$

$$24 + 8 = 16$$

$32 \neq 16$ – не є істинною рівністю, отже $(8; 2)$ – не є розв’язком.

Завдання 2.

Вирази змінну y через x та змінну x через y .

Рівняння	y через x	x через y
$x - y = 2$	$2 - x = y$	$x = 2 + y$
$x - 2y = 5$	$\frac{x - 5}{2} = y$	$x = 5 + 2y$

Завдання 3.

Визначить за якого значення b пара чисел $(-4; 6)$ є одним із розв’язків лінійного рівняння $x + by = 20$

Оскільки $(-4; 6)$ – розв’язок рівняння, то значення -4 та 6 задовольняють рівнянню.

Підставимо,

$$-4 + 6b = 20$$

$$6b = 24$$

$$b = 4$$

Відповідь: Якщо $b = 4$, то $(-4; 6)$ – розв’язок рівняння.

Завдання 4. Знайдіть таке число n , щоб пара чисел $(n; -n)$ була розв’язком рівняння.

$$5x + 4y = 3$$

$$5n - 4n = 3$$

$n = 3$ – розв’язок рівняння.

Задача 1.

На танцювальний фестиваль приїхав ансамбль «Натхнення» із 18 школярів. Їх потрібно розмістити в кімнати або по 3, або 4 дитини. Скільки кімнат потрібно виділити для цього?

Розв’язання

Позначимо кількість тримісних кімнат через x , тоді чотиримісних – y . Тоді в них розміститься $3x + 4y$ дітей, що за умовою задачі дорівнює **18**.

Одержимо рівняння $3x + 4y = 18$.

Виразимо x через y :

$$3x = 18 - 4y,$$

$$x = \frac{18-4y}{3}$$

Перевіримо, за яких натуральних значень x набуває натурального значення y .

якщо $y = 1$, то $x = 4\frac{2}{3}$ – не задовольняє умові задачі

якщо $y = 2$, то $x = 3\frac{1}{3}$ – не задовольняє умові задачі.

якщо $y = 3$, то $x = 2$;

якщо $y = 4$, то $x = \frac{2}{3}$ – не задовольняє умові задачі.

При $x > 4$ змінна y набуває від’ємних значень.

Отже, умову задовольняє одна пара натуральних чисел (2; 3).

Відповідь:

Отже,

- Рівняння виду $ax + by = c$, де x та y – змінні, a, b, c – числа називають лінійним рівнянням з двома змінними (a, b – коефіцієнти при змінних, c – вільний член)
- Розв'язком рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, за яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.
- Лінійне рівняння із двома змінними або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.

Алгоритм розв'язування лінійного рівняння з двома змінними:

1. підставити в рівняння довільне значення однієї змінної
2. розв'язавши одержане рівняння з однією змінною, знайти відповідне значення іншої змінної.

або

1. виразити одну змінну через іншу
2. надаючи змінній x різних значень, знайти відповідні значення y .

Одержимо пару чисел яка є розв'язком рівняння.

