

Урок 6. Розв'язування задач за допомогою системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Існує багато задач, які можна розв'язати за допомогою системи рівнянь. З деякими з них ми вже зустрічались та навіть розв'язували. Але ж процес складання системи рівнянь передбачає етапи, з якими нам слід сьогодні ближче познайомитися, щоб у подальшому розв'язувати більш складні задачі на різну тематику.

Розв'язування задач з використанням систем двох лінійних рівнянь із двома змінними полягає у складанні математичної моделі задачі у вигляді системи рівнянь, яку потім розв'язують і тлумачать одержані розв'язки, аналогічні до тих, що мали місце під час розв'язування задач із застосуванням лінійних рівнянь з однією змінною.

Задача 1. Два кондитера на конкурсі кондитер-фест в рамках фестивалю «Fine Food» виготовляють тістечка. Перший кондитер за 2 години та другий за 3 години виготовляють разом 280 тістечок. За 4 години перший кондитер виготовив на 10 тістечок більше ніж другий за 5 годин. Скільки виготовив кожен кондитер?

Розв'язання

1. Спочатку оберемо і позначимо невідомі.

Позначимо:

x - кількість тістечок виготовлених першим кондитером за годину

y - кількість тістечок виготовлених першим кондитером за годину

2. Утворимо вирази, які за умовою задачі знаходяться у певному відношенні.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I кондитер за 2 год} - 2x \text{ тістечок} \\ \text{II кондитер за 2 год} - 3y \text{ тістечок} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2x + 3y) \\ \text{або } 280 \text{ тістечок} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x \text{ тістечок} - \text{I кондитер за 4 год} \\ 5y \text{ тістечок} - \text{II кондитер за 5 год} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (4x - 5y) \\ \text{або } 10 \text{ тістечок} \end{array}$$

3. Запишемо тепер співвідношення між одержаними виразами у вигляді рівнянь.

$$2x+3y = 280 \text{ та } 4x-5y=10$$

Оскільки в обох рівняннях одні й ті самі невідомі позначено одними й тими самими буквами і потрібно знайти значення цих невідомих, які одночасно задовольняють обидва рівняння, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280, \\ 4x - 5y = 10; \end{cases}$$

Розв'яжемо способом додавання:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 280, & | * 2 \\ 4x - 5y = 10; & | * (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 560, \\ -4x + 5y = -10; \end{cases} \quad +$$

$$11y = 550,$$

$$y = 50,$$

$$\begin{cases} y = 50, \\ 2x + 150 = 280; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 50, \\ 2x = 130; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \mathbf{50}, \\ x = \mathbf{65}. \end{cases}$$

65 тістечок - кількість тістечок виготовлених першим кондитером за годину,

50 тістечок- кількість тістечок виготовлених другим кондитером за годину

Відповідь: 65 тістечок; 50 тістечок.

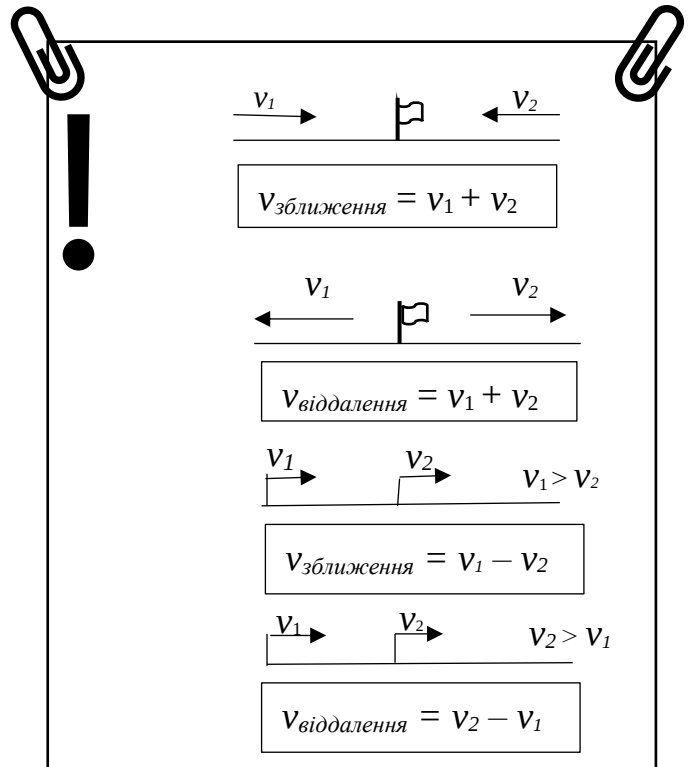
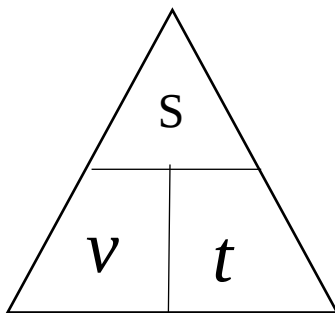
А тепер розглянемо інші задачі:

- на рух,
- сумісну працю,
- змішування рідин.

Розв'яжемо разом.

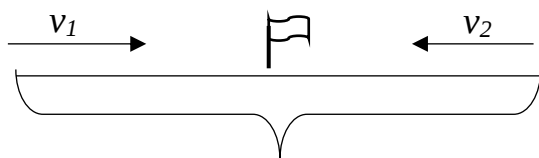
Задача

З двох міст, відстані між якими дорівнюють 52 км, одночасно виїхали назустріч один одному два велосипедиста та зустрілись через 2 год після початку руху. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо відомо, що перший велосипедист проїздить за 3 год на 18 км більше, ніж другий за 2 год.



Нехай швидкість першого велосипедиста – x км/год,

швидкість другого – y км/год.



$$S = 52 \text{ км}$$

$$t = 2 \text{ год}$$

$$v_1 = x \text{ км/год}$$

$$v_2 = y \text{ км/год}$$

$$V_{\text{зближення}} = (x + y) \text{ км/год}$$

$s = 2(x + y)$ км, що за умовою задачі дорівнює 52 км.

Одержимо рівняння:

$$2(x + y) = 52$$

	v	t	S
I	x	3 год	$3x \leftarrow$
II	y	2 год	$2y \leftarrow$

18км

$3x$ – відстань, яку перший проїздить за 3 год

$2y$ – відстань, яку другий проїздить за 2 год

Перший проїхав відстань довшу ніж другий на $(3x - 2y)$, що за умовою задачі дорівнює 18км.

Одержимо рівняння:

$$3x - 2y = 18$$

Маємо:

$$\begin{cases} 2(x + y) = 52 \\ 3x - 2y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 52, \\ 3x - 2y = 18; \end{cases} +$$

$$5x = 70,$$

$$x = 14,$$

$$\begin{cases} x = 14, \\ 28 + 2y = 52; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14, \\ 2y = 24; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14, \\ y = 12. \end{cases}$$

14 км/год - швидкість першого велосипедиста

12 км/год - швидкість другого велосипедиста

Відповідь: 14 км/год; 12 км/год.

Задача на рух по воді.

Катер за 3 год руху проти течії та 2 год за течією проходить 73 км.

Знайдіть власну швидкість катера та швидкість течії, якщо катер проходить за 4 год за течією на 29 км більше, ніж за 3 год руху проти течії.

Нехай власна швидкість катера – x км/год, а швидкість течії – y км/год. Швидкість катера за течією $(x + y)$ км/год, а швидкість катера проти течії $(x - y)$ км/год. За 2 год за течією катер проходить відстань $2(x + y)$ км, а за 3 год проти течії – $3(x - y)$ км. Всього $2(x + y) + 3(x - y)$ км, що за умовою задачі дорівнює 73 км. Одержали рівняння:

$$2(x + y) + 3(x - y) = 73$$

За 4 год за течією катер проходить відстань $4(x + y)$ км, а за 3 год проти течії – $3(x - y)$ км. Всього $4(x + y) - 3(x - y)$ км, що за умовою задачі дорівнює 29 км. Одержали рівняння:

$$4(x + y) - 3(x - y) = 29$$

	v, км/год	t, год	s	t, год	s км
За течією	$(x + y)$	2	$2(x + y)$	4	$4(x + y) \leftarrow$
Проти течії	$(x - y)$	3	$3(x - y)$	3	$3(x - y) \leftarrow$
			$\left. \begin{array}{l} 2(x + y) \\ 3(x - y) \end{array} \right\} 73 \text{ км}$		$\left. \begin{array}{l} 4(x + y) \\ 3(x - y) \end{array} \right\} 29 \text{ км}$

$$\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 73 \\ 4(x + y) - 3(x - y) = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3x - 3y = 73 \\ 4x + 4y - 3x + 3y = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 73 \\ x + 7y = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 73 \\ x = 29 - 7y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(29 - 7y) - y = 73 \\ x = 29 - 7y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 145 - 35y - y = 73 \\ x = 29 - 7y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -36y = -72 \\ x = 29 - 7y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 15 \\ x = 2 \end{cases}$$

15 км/год – власна швидкість катера,

2 км/год – швидкість течії.

Задача на сумісну працю

Два програміста, працюючи в одному проєкті написали 100500 строк коду. Перший працював 70 днів, а другий 100. Скільки строк написав кожен програміст щоденно, якщо за перші 30 днів перший програміст написав на 5550 строк більше ніж другий.

Нехай перший програміст за день пише x строк коду, а другий – y строк. За 70 днів перший напише $70x$ строк, а другий за 100 днів – $100y$. Разом $(70x + 100y)$ строк або 100500. Отримаємо рівняння:

$$70x + 100y = 100500.$$

За 30 днів перший програміст напише $30x$ строк, а другий – $30y$. Перший напише більше ніж другий на $30x - 30y$ строк, що за умовою задачі дорівнює 5550 строк. Отримаємо рівняння:

$$30x - 30y = 5550$$

	A/t (продуктивність), днів	t, днів	A (робота), строк	t, днів	A, строк
I	x	70	70x	30	30x
II	y	100	100y	30	30y

$\left. \begin{array}{l} 70x \\ 100y \end{array} \right\} + = 100500$
 $\left. \begin{array}{l} 30x \\ 30y \end{array} \right\} - = 5550$

$$\begin{cases} 70x + 100y = 100500; | \div 10 \\ 30x - 30y = 5550; | \div 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 10y = 10050, \\ x - y = 185; | \times 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 10y = 10050, \\ 10x - 10y = 1850; \end{cases}$$

$$17x = 11900,$$

$$x = 700;$$

$$\begin{cases} x = 700, \\ 4900 + 10y = 100500; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 700, \\ 10y = 5150; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 700, \\ y = 515. \end{cases}$$

Відповідь: 700 строк, 515 строк.

Задача на змішування рідини.

Змішали 5-відсотковий та 70-відсотковий розчин оцтової кислоти. Скільки треба взяти 70-відсоткового розчину, щоб отримати 130г 30-відсоткового розчину?

Нехай 5-відсоткового розчину – x г, а 70-відсоткового розчину – y г. Всього ($x + y$), що за умовою задачі дорівнює 130. Одержуємо рівняння:

$$x + y = 130.$$

Вміст кислоти в 5-відсотковому розчині $0,05x$ г, а вміст кислоти в 70-відсотковому розчині – $0,7y$ г. Новий розчин містить кислоти $0,05x + 0,7y$, що за умовою задачі дорівнює $130 * 0,3$. Одержуємо рівняння:

$$0,05x + 0,7y = 130 * 0,3$$

	m, г		Вміст кислоти в розчині, %	m кислоти в розчині, г	
I	x	130	5%=0,05	0,05x	130*0.3
II	y		70%=0,7	0,7y	

$$\begin{cases} x + y = 130, \\ 0,05x + 0,7y = 0,3 * 130 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 130, | * (-5) \\ 0,05x + 0,7y = 39; | * 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y = -650, \\ 5x + 70y = 3900; \end{cases} +$$

$$65y = 3250,$$

$$y = 50;$$

$$\begin{cases} y = 50, \\ 5x + 3500 = 3900; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 3900 - 3500, \\ y = 50; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 400, \\ y = 50; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 80; \\ y = 50. \end{cases}$$

80 г кислоти у 70-відсотковому розчині;

50 г кислоти у 70-відсотковому розчині.

Отже,

Алгоритм розв'язування задач за допомогою системи лінійних рівнянь з двома змінними

1. Скласти математичну модель задачі у вигляді системи рівнянь, а саме:
 - обрати і позначити невідомі;
 - використовуючи умову задачі, скласти два рівняння з вибраними невідомими;
 - об'єднати одержані рівняння в систему та розв'язати її;
2. Пояснити одержані розв'язки та записати відповідь