



Найпростіші методи розв'язування діофантових рівнянь

1. Метод повного перебору
2. Використання властивостей подільності
3. Виділення цілої частини

Метод повного перебору полягає у тому, що в рівняння необхідно послідовно підставити усі можливі значення невідомих та вибрати ті, які визначають цілі розв'язки рівняння.

Наприклад: знайдіть двозначне число, яке дорівнює подвоєному добутку його цифр.

Розв'язання:

Нехай число буде мати x десятків та y одиниць. Тому шукане число можна записати як: $xy = 10x + y$.

За умовою задачі: $xy = 2x \cdot y$ або $10x + y = 2x \cdot y$.

$$\text{Звідси } x = \frac{y}{2(y-5)}.$$

Враховуючи, що x та y цифри 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, шуканий результат можна одержати за допомогою повного перебору усіх можливих значень y , тобто в останню рівність треба послідовно підставити цифри. Виконавши підстановки, впевнюємо, що лише одне значення $y = 6$ задовольняє рівність. В цьому випадку $x = 3$, тобто: $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$

$$36 = 36$$

Відповідь: шукане число 36

Метод використання подільності чисел при розв'язуванні діофантових рівнянь полягає у необхідності представлення рівняння у такому вигляді, щоб можна було легко оцінити вираз, використовуючи властивості подільності чисел, і вже потім конкретно перебирати декілька значень.

Наприклад: знайдіть двозначне число, яке дорівнює подвоєному добутку його цифр.

Розв'язання:

Повертаючись до попереднього прикладу можна побачити, що вираз $\frac{y}{2(y-5)}$ - ціле число.

Отже, y - парна цифра (ділиться на 2), більша 5 ($y-5 > 0$, бо інакше отримаємо $x < 0$), тобто необхідно перевірити тільки значення $y = 6$, $y = 8$. При $y = 6$ отримуємо $x = 3$. Не задовольняє умові задачі і $y = 8$, бо у цьому випадку рівність $x = \frac{y}{2(y-5)}$ дає $x = \frac{3}{4}$.

Відповідь : шукане число 36.

Таким чином проста оцінка виразу (використання властивостей подільності) звела перебор до мінімуму.

Метод виділення цілої частини – є загальним методом для розв'язання у цілих числах діофантових рівнянь. Він був названий у Індії методом розсіювання (роздроблення). Натяки саме на таке розв'язування зустрічаються вперше у працях індійського астронома Аріабхатти, подібне розв'язування виклали індійські математики Брахмагупта та Бхагкара, бо саме у Індії невизначені рівняння розв'язувалися із астрономічними запитами та календарними розрахунками, тому ними займалися астрономи та математики.

Наприклад: Чоловік купує у магазині річ вартістю у 19 грн. У нього є лише 15 купюр по три грн., у касира лише 20 купюр по п'ять грн. Чи можна розрахуватися і як?

Розв'язання:

Задача зводиться до розв'язку у цілих додатних числах діофантового рівняння: $3x - 5y = 19$, де $x \leq 15$, $y \leq 20$

Більш того $y < 9$, бо $3x - 5y > 0$

$$x = \frac{19+5y}{3} = 6 + y + \frac{1+2y}{3} = 6 + y + y_1$$

маємо, $3y_1 - 2y = 1,$

$$y = \frac{3y_1-1}{2} = y_1 + \frac{y_1-1}{2} = y_1 + y_2,$$

$$y_1 - 2y_2 = 1, \quad y_1 = 2y_2 + 1.$$

Таким чином: $x = 5y_2 + 8, \quad y = 3y_2 + 1.$

Беручи до уваги те, що x і y повинні бути додатними, та враховуючи умову задачі, легко встановити, що $0 \leq y_2 < 2$, тобто y_2 може приймати тільки два значення: 0; 1. Звідси випливають два можливі розв'язки.

x	8	13
y	1	4