



Діофантові рівняння



(325-409)

Діофант Олександрійський – древньогрецький математик. Автор «Арифметики», в якій використано буквену символіку та від'ємні числа. Буквена символіка Діофанта базувалася на скороченні слів. Він перший запропонував записувати умови задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь.

Діофанові рівняння – невизначені поліноміальні рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких невідомі змінні можуть набувати тільки цілих значень. Названі на честь давньогрецького математика Діофанта Олександрійського.

Рівняння виду $ax + by = c$ де a, b, c — числа, а x, y — змінні, називають діофантовим рівнянням першого степеня з двома змінними.

Діофантовим рівнянням 1-го степеня (лінійним) з n невідомими називається рівняння вигляду $(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b)$, де всі коефіцієнти і невідомі — цілі числа і хоча б одне $a_k \neq 0$

Розв'язком діофантового рівняння буде n цілих чисел $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, що задовольняє $a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_nx'_n = b$

Теорема: Лінійне діофантове рівняння з двома невідомими $ax + by = c$ можна розв'язати в цілих числах тоді і тільки тоді, коли число c ділиться націло на НСД(a, b).

Для розв'язання рівняння застосовують наступні теореми.

- Теорема 1. Якщо a і b — взаємно прості числа, то для будь-якого цілого c , рівняння має хоча б один розв'язок у цілих числах.
- Теорема 2. Якщо a і b мають спільний натуральний дільник $d > 1$, а ціле число c не ділиться на d , то рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків в цілих числах.
- Теорема 3. Якщо a і b — взаємно прості числа, то рівняння $ax + by = c$ має нескінченну кількість розв'язків, які знаходять за формулами $x = x_0 + bk$ та $y = y_0 - bk$, де (x_0, y_0) — будь-який цілий розв'язок цього рівняння, $k \in \mathbb{Z}$.

Частковий розв'язок (x_0, y_0) для малих a і b можна знайти підбором, а у випадку, коли числа a і b великі, скористувавшись наступною теоремою:

- Теорема 4. $\text{НСД}(a, b) = d$ може бути записаний у вигляді $d = am + bn$ де m, n — цілі числа.

Розв'язати діофантове рівняння означає:

- а) з'ясувати, чи має рівняння хоча б один ненульовий розв'язок у цілих числах;
- б) якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, то з'ясувати скінченна чи нескінченна множина його розв'язків;
- в) знайти всі цілі розв'язки рівняння.

Математики Стародавньої Греції та Стародавньої Індії знали методи розв'язання деяких рівнянь другого степеня вигляду $ax^2 + bxy + cy^2 = dz^2$. Зокрема їм були відомі всі піфагорові трійки натуральних чисел x, y, z , що задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = z^2$. Всі трійки взаємно простих піфагорових чисел стародавні математики знаходили за формулами $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$, m, n — натуральні числа, $m > n$.

У 20-х роках ХХ сторіччя англійський математик Морделл висунув гіпотезу, що рівняння вищого степеня, ніж третій, можуть мати лише скінчену кількість цілих розв'язків. Цю гіпотезу було доведено голландським математиком Фалтінгсом 1983 року.

Особливе місце серед діофантових рівнянь посідає рівняння $x^n + y^n = z^n$, де n — натуральне число. Французький математик П'єр Ферма стверджував, що для $n > 2$ це рівняння не має розв'язків у натуральних числах. Однак довести це твердження, яке назвали Великою теоремою Ферма, виявилося не так просто.