

## Заняття № 4

**Тема заняття:** Значення синуса, косинуса, тангенса для кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .

**Тип заняття:** засвоєння нових знань і вмінь.

**Цілі заняття:**

 **формування предметних компетентностей:** домогтися засвоєння основних співвідношень між тригонометричними функціями одного кута, формул доведення, способу обчислення та значень синуса, косинуса й тангенса кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ; сформувати вміння розв'язувати задачі на застосування цих співвідношень та значень тригонометричних функцій;

 **формування ключових компетентностей:** формувати вміння оперувати числовою інформацією; сприяти самовихованню ініціативності, відповідальності, упевненості в собі.

**Пояснювальна записка до заняття.**

Заняття № 4 складається з теоретичного матеріалу з теми «Значення синуса, косинуса, тангенса для кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ », презентації, відео, практичних, тестових завдань для самоконтролю знань з теми. Для більшої зацікавленості з даної тем пропонуємо вам ознайомитися з цікавими фактами про Піфагора, переглянути відео ролики. На слайдах 3-7 ви можете перевірити себе до готовності вивчення нової теми, а вже на слайдах 23-32 ви можете перевірити себе з метою контролю набутих знань, вмінь та навичок з теми.

**Рекомендації щодо опрацювання заняття.**

1. Вивчити теоретичні відомості про значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса для кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .
2. Переглянути презентацію до заняття № 4.
3. Ознайомитись із основними співвідношеннями між тригонометричними функціями одного кута, формул доповнення, способу обчислення та значень синуса, косинуса, тангенса й котангенса кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .
4. Зробити опорний конспект.
5. Вивчити основні поняття.
6. Розглянути приклади розв'язування завдань.

7. Розв'язати завдання з теми.
8. Відповісти на питання для самоконтролю.

### Відомості про практичне застосування.

Наприкінці заняття учні зможуть обчислювати значення синуса, косинуса, тангенса для кутів  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , розв'язувати задачі на застосування основних співвідношень та значень тригонометричних функцій.

### Хід заняття

#### I. Актуалізація опорних знань.

✚ У прямокутному трикутнику один із гострих кутів дорівнює  $45^\circ$ , а один із катетів – 7 см. Знайдіть другий гострий кут і другий катет.

✚ Знайдіть гіпотенузу прямокутного рівнобічного трикутника, якщо його катет дорівнює 8 см.

✚ У рівносторонньому трикутнику  $ABC$   $AD$  – медіана. Знайдіть кути трикутника  $ADC$ .

✚ Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює 6 см.

#### II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу.

##### 1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного кута.

##### *ТЕОРЕМА (основна тригонометрична тотожність)*

Для будь-якого гострого кута  $\alpha$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

##### *ДОВЕДЕННЯ*

□ За означенням синуса і косинуса гострого кута прямокутного трикутника (рис. 1) маємо:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

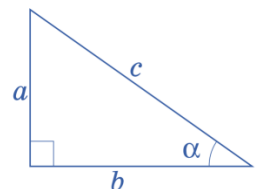


Рис. 1

За теоремою Піфагора чисельник цього дробу дорівнює  $c^2$ , тобто  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . ■

## НАСЛІДОК

Для будь-якого гострого кута  $\alpha$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Доведемо ще кілька тригонометричних тотожностей.

Безпосередньо з означень синуса і косинуса маємо:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ тобто } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Аналогічно доводиться, що  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

Звідси випливає, що  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ .

## 2. Формули доповнення.

### ТЕОРЕМА (формули доповнення)

Для будь-якого гострого кута  $\alpha$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

### ДОВЕДЕННЯ

□ Розглянемо прямокутний трикутник  $ABC$  з гіпотенузою  $AB$  (рис. 2). Якщо  $\angle A = \alpha$ , то  $\angle B = 90^\circ - \alpha$ . Подавши синуси і косинуси гострих кутів трикутника, маємо:

$$\sin \angle B = \frac{AC}{AB}, \quad \cos \angle A = \frac{AC}{AB}, \text{ тобто } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin \angle B = \frac{BC}{AB}, \quad \cos \angle A = \frac{BC}{AB}, \text{ тобто } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \text{ Теорему доведено. } \blacksquare$$

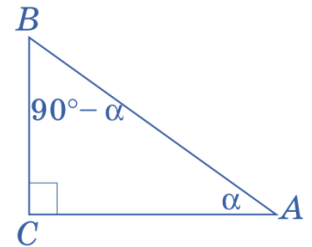


Рис. 2

## НАСЛІДОК

Для будь-якого гострого кута  $\alpha$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

## 3. Обчислення синуса, косинуса й тангенса кута $45^\circ$ .

Для обчислення значень тригонометричних функцій кута  $45^\circ$  розглянемо рівнобедрений прямокутний трикутник  $ABC$  з катетами  $AC = BC = a$  (рис. 3). За теоремою Піфагора  $AB = a\sqrt{2}$ . Маємо:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

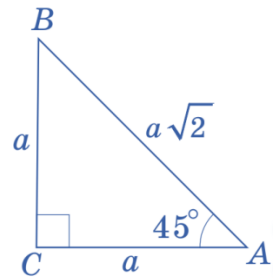


Рис. 3

#### 4. Обчислення синуса, косинуса й тангенса кута $30^\circ$ .

Обчислимо значення тригонометричних функцій кута  $30^\circ$ . Для цього в рівносторонньому трикутнику  $ABC$  зі стороною  $a$  проведемо висоту  $BD$ , яка є також бісектрисою і медіаною (рис. 4). У трикутнику  $ABD$   $\angle D = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,

$AB = a$ ,  $AD = \frac{a}{2}$ , і за теоремою Піфагора  $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Маємо:

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

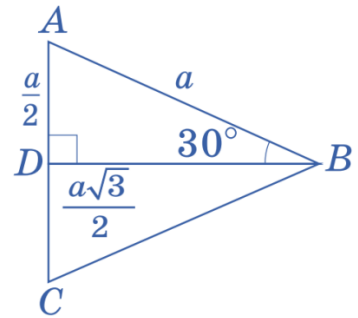


Рис. 4

#### 5. Обчислення синуса, косинуса й тангенса кута $60^\circ$ .

За допомогою формул доповнення отримуємо значення тригонометричних функцій кута  $60^\circ$ :

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

| Функція                     | Кут $\alpha$         |                      |                      |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|                             | 30°                  | 45°                  | 60°                  |
| $\sin \alpha$               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

### III. Осмислення нового матеріалу.

#### 1. Приклади розв'язання та оформлення завдань.

**Завдання 1.** Знайдіть косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника, синус якого дорівнює 0,8.

#### Розв'язання.

Нехай для гострого кута  $\alpha$   $\sin \alpha = 0,8$ . Тоді  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , тобто  $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = \sqrt{0,36} = 0,6$ .

Оскільки  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{0,6} = \frac{3}{4}$ .

**Відповідь.** 0,6;  $\frac{3}{4}$ .

**Завдання 2.** Знайдіть висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо основа дорівнює 12 см, а кут при вершині трикутника дорівнює 120°.

#### Розв'язання.

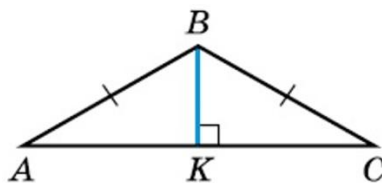


Рис. 5

Нехай  $ABC$  – даний трикутник,  $AB=BC$ ,  $AC=12$  см,  $\angle ABC=120^\circ$  (рис. 5).

Проведемо до основи  $AC$  висоту  $BK$ , яка є також медіаною і бісектрисою. Тоді  $KC = \frac{AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$  (см),  $\angle KBC = \angle ABC : 2 = 120^\circ : 2 = 60^\circ$ .

Із  $\triangle BKC$  ( $\angle K = 90^\circ$ ):  $\operatorname{tg} \angle KBC = \frac{KC}{BK}$ , звідси

$$BK = \frac{KC}{\operatorname{tg} \angle KBC} = \frac{6}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

**В і д п о в і д ь.**  $2\sqrt{3}$  см.

**Завдання 3.** Знайдіть косинус, синус, тангенс та котангенс кута  $37^\circ$ .

**Р о з в' я з а н н я.**

$$\sin 37^\circ = 0,602; \cos 37^\circ = 0,799;$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = 0,754; \operatorname{ctg} 37^\circ = 1,327.$$

| Градуси | $\sin \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  | $\operatorname{tg} \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$   | $\operatorname{ctg} \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ | $\cos \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  | Градуси |
|---------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------|
| 37      | 0,602                                                 | 0,754                                                               | 1,327                                                              | 0,799                                                 | 53      |
| Градуси | $\cos \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | $\operatorname{ctg} \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | $\operatorname{tg} \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | $\sin \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | Градуси |

**Завдання 4.** Знайдіть косинус, синус, тангенс та котангенс кута  $53^\circ$ .

**Р о з в' я з а н н я.**

$$\sin 53^\circ = 0,799; \cos 53^\circ = 0,602;$$

$$\operatorname{tg} 53^\circ = 1,327; \operatorname{ctg} 53^\circ = 0,754.$$

| Градуси | $\sin \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  | $\operatorname{tg} \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$   | $\operatorname{ctg} \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ | $\cos \alpha$<br>$0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  | Градуси |
|---------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------|
| 37      | 0,602                                                 | 0,754                                                               | 1,327                                                              | 0,799                                                 | 53      |
| Градуси | $\cos \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | $\operatorname{ctg} \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | $\operatorname{tg} \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | $\sin \alpha$<br>$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ | Градуси |

## 2. Завдання для самостійного опрацювання.

**Завдання 5.** Знайдіть значення виразів:

1)  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$ ;      2)  $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ ;

3)  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$ ;      4)  $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$ .

**Завдання 6.** Знайдіть косинус кута: 1)  $25^\circ$ ; 2)  $39^\circ$ ; 3)  $83^\circ$ .

**Завдання 7.** Знайдіть синус кута: 1)  $35^\circ$ ; 2)  $49^\circ$ ; 3)  $89^\circ$ .

**Завдання 8.** Знайдіть тангенс кута: 1)  $15^\circ$ ; 2)  $59^\circ$ ; 3)  $72^\circ$ .

**Завдання 9.** Знайдіть величину гострого кута  $x$ , якщо:

1)  $\sin x = 0,013$ ; 2)  $\cos x = 0,211$ ; 3)  $\operatorname{tg} x = 0,322$ .

#### IV. Підсумки заняття.

##### 1. Питання для самоперевірки.

✚ Як пов'язані між собою  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ?

✚ Як пов'язані між собою  $\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ?

✚ Як пов'язані між собою  $\operatorname{tg} \alpha$  і  $\operatorname{ctg} \alpha$ ?

✚ Як пов'язані між собою  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$ ?

✚ Чому дорівнює  $\sin(90^\circ - 30^\circ)$ ,  $\cos(90^\circ - 30^\circ)$ ,  $\operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ)$ ,  $\operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ)$ .

✚ Чому дорівнює  $\sin 30^\circ$ ,  $\cos 30^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 30^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 30^\circ$ ?

✚ Чому дорівнює  $\sin 45^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 45^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 45^\circ$ ?

✚ Чому дорівнює  $\sin 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 60^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 60^\circ$ ?

##### 2. Експрес-контроль.

Для проходження швидкого експрес-контролю виконайте завдання за посиланням на Google Forms:

<https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfufKs5fOzcwZOwYhbbKUPkAMuobbEx0wVwf89C1Xxm1uQj4A/viewform>

Якщо ви маєте проблеми із роботою за поданим посиланням, виконайте ці ж завдання, які розташовано нижче:

1) Визначте чому дорівнює  $\sin 60^\circ$ .

А)  $\frac{1}{2}$       Б)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       В)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       Г) 1

2) Визначте чому дорівнює  $\cos 45^\circ$ .

А) 1      Б)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       В)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       Г)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Визначте чому дорівнює  $\operatorname{tg} 30^\circ$ .

А)  $\sqrt{3}$       Б) 1      В)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       Г)  $\sqrt{2}$

4) Обчисліть:  $2 \cdot (\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ)$ .

5) У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює  $60^\circ$ , а катет, який лежить проти нього, дорівнює  $6\sqrt{3}$  см. Знайдіть гіпотенузу.

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
| 2 бали | 2 бали | 2 бали | 3 бали | 3 бали |

### 3. Самостійна робота.

Для більш якісного засвоєння матеріалу пройдіть тест за посиланням:  
<https://online.hneu.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=11138>

### 4. Інтерактивні вправи.

✚ Співставте ліву і праву частини основних тригонометричних тотожностей. Для перевірки правильності завдання, знайдіть пари на сайті LearningApps: <https://learningapps.org/display?v=pa7ord9pj20>

|                                                            |                                   |                                 |                                       |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| $\operatorname{tg} \alpha$                                 | 1                                 | $\operatorname{ctg} \alpha$     | $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$     |
| $\operatorname{tg} \alpha$                                 | 1                                 | $\operatorname{ctg} \alpha$     | $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  |
| $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ | $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ | $\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ |

✚ Знайдіть пару значень тригонометричних функцій деяких кутів. Для перевірки правильності завдання, знайдіть пари на сайті LearningApps: <https://learningapps.org/display?v=pczo97nbc20>

|                      |                      |               |                      |                               |
|----------------------|----------------------|---------------|----------------------|-------------------------------|
| $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$          |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1             | 1                    | $\frac{\sqrt{2}}{2}$          |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{3}$           | $\sqrt{3}$    | $\sin 60^\circ$      | $\operatorname{ctg} 30^\circ$ |

|                              |                 |                              |                               |                               |
|------------------------------|-----------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $\operatorname{tg} 30^\circ$ | $\cos 60^\circ$ | $\sin 45^\circ$              | $\operatorname{ctg} 45^\circ$ | $\operatorname{ctg} 60^\circ$ |
| $\sin 30^\circ$              | $\cos 45^\circ$ | $\operatorname{tg} 45^\circ$ | $\operatorname{tg} 60^\circ$  | $\cos 30^\circ$               |

#### **V. Домашнє завдання.**

Опрацювати матеріали, що знаходяться в папці «Заняття № 4» до цього заняття та § 19 п. 19.2 та § 20 (сторінки 207-208, 213-215 підручника «Геометрія 8 клас» (А.П. Єршова, В.В. Голобородько, С.В. Єршов, О.Ф. Крижановський).