

Заняття № 1

Тема заняття: Теорема Піфагора.

Тип заняття: засвоєння нових знань і вмінь.

Цілі заняття:

 **формування предметних компетентностей:** домогтися засвоєння теореми Піфагора; формування вміння «бачити» прямокутні трикутники, які є частинами інших геометричних фігур; сформувати вміння знаходити невідому сторону прямокутного трикутника за двома відомими;

 **формування ключових компетентностей:** формувати вміння оперувати геометричними об'єктами на площині; сприяти усвідомленню значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві; сприяти самовихованню допитливості, зацікавленості в пізнанні нового.

Пояснювальна записка до заняття.

Заняття № 1 складається з теоретичного матеріалу з теми «Теорема Піфагора», презентації, відео, практичних, інтерактивних, тестових завдань для самоконтролю знань з теми. Для більшої зацікавленості з даної теми пропонуємо вам ознайомитися з цікавими фактами про Піфагора, переглянути відеоролики. На слайдах 4-9 ви можете перевірити себе до готовності вивчення нової теми, а вже на слайдах 26-34 ви можете перевірити себе з метою контролю набутих знань, вмінь та навичок з теми.

Рекомендації щодо опрацювання заняття.

1. Вивчити теоретичні відомості про теорему Піфагора.
2. Переглянути презентацію до заняття № 1.
3. Ознайомитись з вмінням «бачити» прямокутні трикутники, які є частинами інших геометричних фігур, знаходити невідому сторону прямокутного трикутника за двома відомими.
4. Зробити опорний конспект.
5. Вивчити основні поняття.
6. Розглянути приклади розв'язування завдань.
7. Розв'язати завдання з теми.

8. Відповісти на питання для самоконтролю.

Відомості про практичне застосування.

Наприкінці заняття учні зможуть формулювати теорему Піфагора, знаходити на малюнках сторони прямокутного трикутника, доводити теорему Піфагора, застосовувати вивчені означення й властивості до розв'язування задач, зокрема практичного змісту.

Хід заняття

Епіграфом нашого уроку є слова Піфагора: «Не роби ніколи того, що не знаєш. Але вчись усьому, що потрібно знати, і тоді будеш вести спокійне життя».

I. Актуалізація опорних знань.

Продовж незакінчене математичне речення:

✚ Трикутник – це...

✚ Прямокутним трикутником називається...

✚ Сторона прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута називається..., а дві інші сторони прямокутного трикутника називаються...

✚ Сума всіх кутів трикутника дорівнює...

✚ Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює...

✚ Якщо в прямокутному трикутнику один гострий кут дорівнює 30° , то інший гострий кут дорівнює...

✚ Катет, що лежить проти кута в 30° , дорівнює...

✚ Якщо в прямокутному трикутнику один кут дорівнює 45° , то інший гострий кут дорівнює ...і в такому трикутнику катети...

✚ Сформулюйте ознаки подібності трикутників.

✚ Сформулюйте теорему про метричні співвідношення в прямокутному трикутнику.



Ім'я якого відомого математика складається з трьох складів? Причому перший склад – число, другий – нота, а третій – одне з імен давньоєгипетського бога Сонця (Піфагор).

На сьогоднішньому занятті ви ознайомитесь з доведенням теореми Піфагора; застосуванням її при розв'язуванні задач.

II. Історична довідка.

Наприкінці XIX століття на Марсі було відкрито «канали», які тривалий час вважалися штучними. Для налагодження зв'язків з марсіанами запропонували на величезному просторі Західно-Сибірської низини побудувати гігантський прямокутний трикутник. Ця фігура повинна була світитися, бо вважали, що побачивши це зображення, марсіани зроблять висновок, що на Землі живуть розумні істоти, і дадуть відповідь також мовою математики.

Що таке можна виділити в прямокутному трикутнику, що відомо всій цивілізації?

Це співвідношення між катетами і гіпотенузою, яке отримало назву «Теорема Піфагора».

У середині віки теорема Піфагора вважалася на стільки складною, що її називали *pons asinorum* («ослячий місток»), або *elefuga* («втеча нікчемних»), оскільки далеко не кожний міг її довести, тобто перейти через «ослячий місток».

Сподіваюся, що ти перейдеш його без проблем.



III. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу.

1. Теорема Піфагора

ТЕОРЕМА (теорема Піфагора)

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

ДОВЕДЕННЯ

□ На рисунку (рис. 1) зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB=90^\circ$). Доведемо, що $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Проведемо висоту CD. Застосувавши теорему для катетів AC і BC, отримуємо: $AB^2 = AC \cdot AD$ і $BC^2 = AB \cdot DB$. Додавши почлено ці рівності, отримаємо: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$.

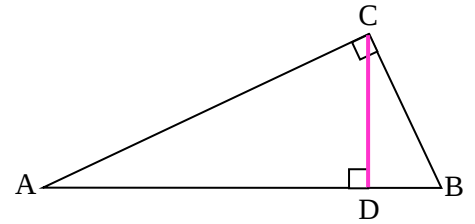


Рис. 1

Далі маємо: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$. ■

Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють a і b , а довжина гіпотенузи c , то теорему Піфагора можна виразити такою рівністю:

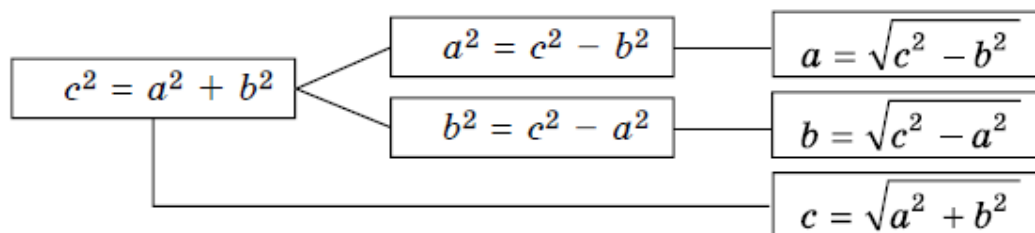
$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Застосування теореми Піфагора до обчислення невідомої сторони прямокутного трикутника за двома відомими.

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

З рівності $c^2 = a^2 + b^2$ також випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, звідси $c > a$ і $c > b$, тобто *гіпотенуза більша за будь-який із катетів*.



3. Теорема, обернена до теореми Піфагора.

ТЕОРЕМА (обернена до теореми Піфагора)

Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник є прямокутний: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$.

ДОВЕДЕННЯ

□ Нехай у трикутнику ABC (рис. 2, а) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Доведемо, що кут C прямий. Розглянемо трикутник $A_1B_1C_1$ з прямим кутом C_1 , у якому $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 2, б).

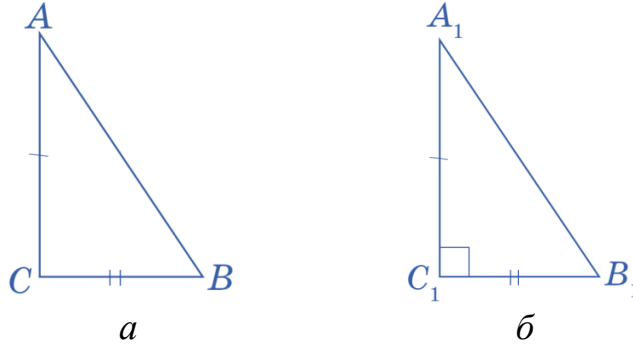


Рис. 2

За теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а з урахуванням рівностей двох сторін розглядуваних трикутників $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$.

Тоді $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ за трьома сторонами, звідки $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. ■

IV. Осмислення нового матеріалу.

1. Приклади розв'язання та оформлення завдань.

Завдання 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть гіпотенузу.

Розв'язання.

Нехай $a = 7$ см, $b = 24$ см, тоді

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 25 см.

Завдання 2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а один з катетів – 15 см. Знайдіть другий катет.

Розв'язання.

Нехай $a = 15$ см, $c = 17$ см, тоді

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17 - 15)(17 + 15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 8 см.

Завдання 3. Знайдіть діагональ квадрата, сторона якого дорівнює a .

Розв'язання.

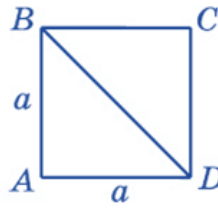


Рис. 3

Розглянемо квадрат $ABCD$, у якого $AB = AD = a$ (рис. 3). Тоді

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Відповідь. $a\sqrt{2}$.

Завдання 4. Знайдіть медіану рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a .

Розв'язання.

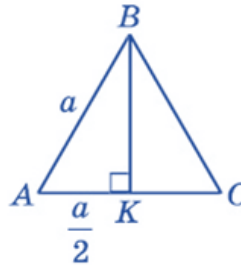


Рис. 4

Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною a , BK – медіана цього трикутника (рис. 4). Оскільки BK – медіана рівностороннього трикутника, то вона є також і висотою.

У $\triangle ABK$: $\angle K = 90^\circ$, $AB = a$, $AK = \frac{a}{2}$. Тоді

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Завдання 5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 22 см, а бічна сторона – 13 см. Знайдіть висоту трапеції.

Розв'язання.

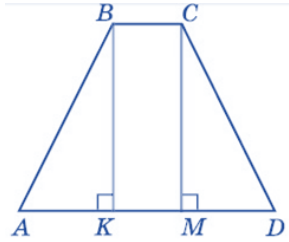


Рис. 5

Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = 22$ см, $BC = 12$ см, $AB = CD = 13$ см (рис. 5)

1) Проведемо висоти BK і CM .

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому

$$AK = MD = \frac{AD - KM}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

3) Із $\triangle ABK$ за теоремою Піфагора маємо:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 12 см.

Завдання 6. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а другий на 2 см менший від гіпотенузи. Знайдіть невідомий катет трикутника.

Розв'язання.

Нехай $a = 8$ см і $b = x$ см – катети трикутника, тоді $c = (x+2)$ см – його гіпотенуза. Оскільки за теоремою Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$, маємо рівняння:

$$(x + 2)^2 = 8^2 + x^2, \text{ звідси } x = 15 \text{ (см)}.$$

Отже, невідомий катет дорівнює 15 см.

Відповідь. 15 см.

Завдання 7. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 20 см і 21 см. Знайдіть висоту проведену до найбільшої сторони.

Розв'язання.

Нехай BH – висота трикутника ABC , в якому $AB = 13$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см (рис. 6). Оскільки AC – найбільша сторона трикутника, то точка H лежить на цій стороні (доведіть це самостійно). Приймемо довжину відрізка AH за x см, тоді $HC = (21 - x)$ см. За теоремою Піфагора з прямокутного трикутника

ABH маємо: $BH^2 = AB^2 - AH^2$, тобто $BH^2 = 13^2 - x^2$, а з прямокутного трикутника BCH маємо: $BH^2 = BC^2 - CH^2$, тобто $BH^2 = 20^2 - (21 - x)^2$. Прирівнюючи два вирази для BH^2 , маємо:

$$\begin{aligned}13^2 - x^2 &= 20^2 - (21 - x)^2; \\169 - x^2 &= 400 - (21 - x)^2; \\169 - x^2 &= 400 - 441 + 42x - x^2; \\42x &= 210; \\x &= 5.\end{aligned}$$

Таким чином, $AH = 5$ см.

Тоді з трикутника ABH за теоремою Піфагора $BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

В і д п о в і д ь. 12 см.

2. Завдання для самостійного опрацювання.

Завдання 8. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 4 см і 3 см.

Завдання 9. Знайдіть сторони ромба, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 12 см.

Завдання 10. Знайдіть висоту рівнобічного трикутника, основа якого дорівнює 20 см, а бічна сторона – 26 см².

Завдання 11. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, діагональ – 20 см, висота – 12 см. Знайдіть площу трапеції.

Завдання 12. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 25 см. Менша діагональ перпендикулярна до більшої бічної сторони і дорівнює 15 см. Знайдіть периметр трапеції.

V. Підсумки заняття.

1. Питання для самоперевірки.

 Сформулюйте теорему Піфагора.

 Запишіть теорему Піфагора, якщо катети трикутника дорівнюють a і b , а гіпотенуза дорівнює c .

 Як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону?

✚ Яка із сторін прямокутного трикутника є найбільшою?

2. Експрес-контроль.

Для проходження експрес-контролю виконайте завдання за посиланням на Google Forms:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdOR0cTrEP_8abvJQcAGyIddi_AnH1DsYy8juG-9PCUndmag/viewform

Якщо ви маєте проблеми із роботою за поданим посиланням, виконайте ці ж завдання, які розташовано нижче:

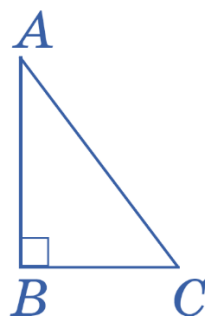


Рис. 7

1) $AB \perp BC$, $AB = 8$ см (рис. 7). Знайдіть гіпотенузу AC , якщо $BC = 6$ см.

А) 6 см Б) 8 см В) 10 см Г) 12 см

2) $AB \perp BC$, $AB = 8$ см (рис. 7). Знайдіть гіпотенузу BC , якщо $AC = 10$ см.

А) 6 см Б) 8 см В) 10 см Г) 12 см

3) $AB \perp BC$, $AB = 8$ см (рис. 7). Знайдіть гіпотенузу AC , якщо $BC = \sqrt{17}$ см.

А) 7 см Б) 9 см В) 11 см Г) 12 см

4) Знайдіть довжину діагоналі прямокутника, якщо одна його сторона дорівнює 15 см, а периметр становить 46 см.

5) Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, більша основа – 17 см, висота – 8 см. Обчисліть периметр трапеції.

1	2	3	4	5
2 бали	2 бали	2 бали	3 бали	3 бали

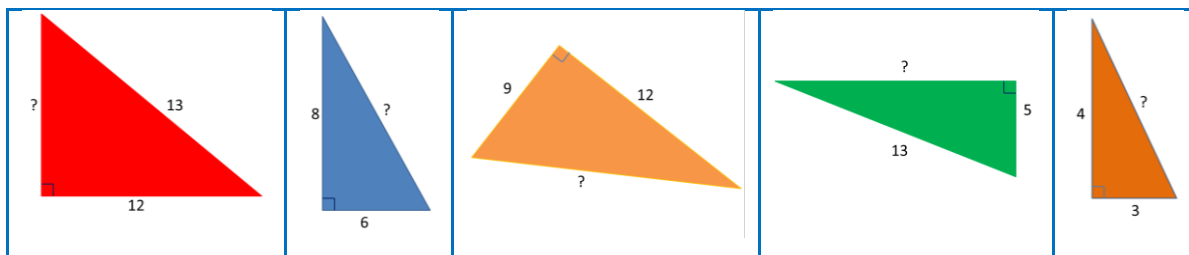
3. Самостійна робота.

Для більш якісного засвоєння матеріалу пройдіть тест за посиланням:

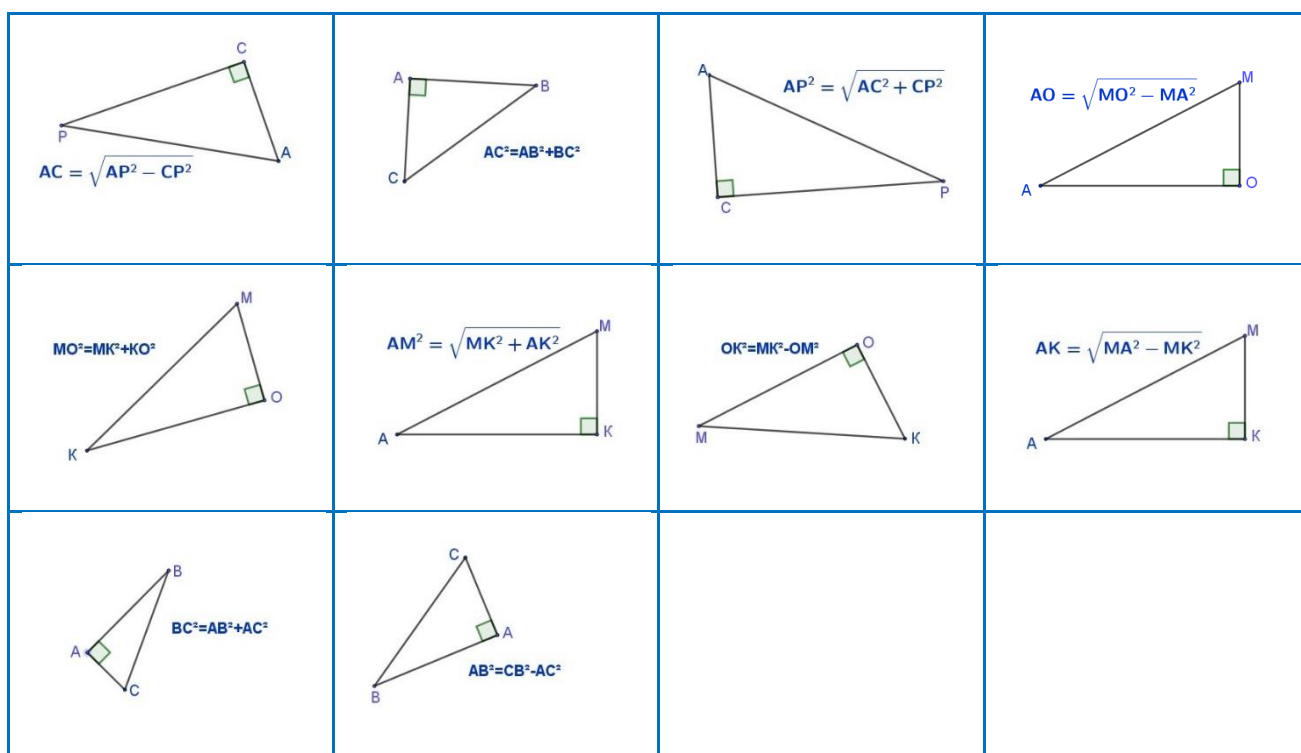
<https://online.hneu.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=11049>

4. Інтерактивні вправи.

✚ За теоремою Піфагора знайдіть невідому сторону. Для перевірки правильності завдання доберіть пари на сайті LearningApps: <https://learningapps.org/display?v=p0twfxjoc20>



✚ З'ясуйте правильно, чи ні записали теорему Піфагора для даного трикутника. Для перевірки правильності завдання, якщо формула вірна, то її перетягніть у зону правильно, якщо невірна – неправильно на сайті LearningApps: <https://learningapps.org/display?v=prhv77d7k20>



VI. Домашнє завдання.

Опрацювати матеріали, що знаходяться в папці «Заняття № 1» та § 13 п. 13.1 та п. 13.2 (сторінки 128-130 підручника «Геометрія 8 клас» (авт. А.П. Єршова, В.В. Голобородько, С. В. Єршов, О. Ф. Крижановський).