



Головна ідея



АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Розглянемо рівняння $2015x^2 - 2016x + 1 = 0$. Якщо для його розв'язання застосувати одну з формул, вивчених раніше, це призведе до громіздких перетворень. Очевидно, що ці формули, хоча вони широко вживані та універсальні, у нашому випадку не є зручними. А чи існує спосіб спростити розв'язання?

Коефіцієнти квадратного тричлена мають кілька цікавих властивостей. Зокрема, таку: якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) сума всіх коефіцієнтів дорівнює нулю, то один із коренів рівняння дорівнює 1. (Переконайтеся в цьому, підставивши в рівняння значення $x = 1$.)

Для рівняння $2015x^2 - 2016x + 1 = 0$ виконується рівність $a + b + c = 0$. Отже, ми можемо відразу знайти один корінь: $x = 1$. А як тоді знайти другий корінь і чи можна уникнути складних обчислень? Відповісти на ці запитання допоможе теорема Вієта, про яку ви дізнаєтеся сьогодні.

Розглянемо подані квадратні рівняння, що записані у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, та спробуємо знайти зв'язок між сумою коренів, їх добутком і коефіцієнтами рівняння.

Рівняння	Корені	Сума коренів	Другий коефіцієнт (b)	Добуток коренів	Вільний член (c)
$x^2 - 5x - 6 = 0$	6; -1	5	-5	-6	-6
$y^2 + 6y + 8 = 0$	-4; -2	-6	6	8	8
$y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$	$\frac{1}{2}$; 2	$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	$-2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$	1	1

Видно, що сума коренів кожного рівняння дорівнює числу, протилежному другому коефіцієнту, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Таку властивість має будь-яке зведене квадратне рівняння, якщо його корені існують. Ця властивість є однією з основних теорем алгебри і має власну назву — теорема Вієта (доведення теореми Вієта дивись у презентації)

Теорема Вієта.

Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а їх добуток — вільному члену.

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння

$$x^2 + px + q = 0, \text{ то } \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!



Наприклад, у рівнянні $x^2 - 12x + 20 = 0$ сума коренів дорівнює 12, а добуток 20.

Будь-яке квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна перетворити на зведене, поділивши обидві його частини на $a \neq 0$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ — зведене квадратне рівняння.}$$

Теорема Вієта для повного квадратного рівняння.

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ то } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!





Вправа 1. Знайдіть коефіцієнт p і другий корінь x_2 квадратного рівняння $x^2 + px - 6 = 0$, якщо один із коренів $x_1 = -2$.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Запишемо теорему Вієта для заданого рівняння.	$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = -6. \end{cases}$
2.	Підставимо значення $x_1 = -2$ у друге рівняння системи й знайдемо значення x_2 .	$\begin{aligned} -2 \cdot x_2 &= -6 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$
3.	Підставимо значення x_1 та x_2 в перше рівняння системи й знайдемо p .	$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ -2 + 3 &= -p \\ -p &= 1 \\ p &= -1 \end{aligned}$
4.	Запишемо відповідь.	Відповідь: $p = -1, x_2 = 3$.

Розв'язуючи окремі задачі, пов'язані з квадратними рівняннями, використовують теорему, обернену до теореми Вієта (доведення дивись у презентації).



Інший спосіб доведення цієї теореми ви можете знайти на сайті interactive.ranok.com.ua

Теорема, обернена до теореми Вієта.

Якщо числа x_1 та x_2 такі, що $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1 \cdot x_2 = q$, то вони є коренями рівняння

$$x^2 + px + q = 0.$$

Якщо $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$ то x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.





Вправа 2. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $5x^2 - 7x + 2 = 0$.
Визначте знаки коренів рівняння.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Визначимо коефіцієнти заданого рівняння.	$a = 5, b = -7, c = 2$
2.	Знайдемо дискримінант квадратного рівняння та порівняємо його з нулем.	$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9, 9 > 0$
3.	За знаком D визначимо кількість коренів квадратного рівняння.	Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні корені $x_1 \neq x_2$
4.	Поділимо обидві частини рівняння на 5 — отримаємо зведене рівняння.	$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$
5.	Визначимо коефіцієнти зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ та запишемо для нього теорему Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{5}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}. \end{cases}$
6.	Звернемо увагу на знак добутку коренів і зробимо висновок: оскільки добуток додатний, то корені x_1 і x_2 мають один знак.	$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5} > 0$, тоді $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0 \end{cases}$
7.	Звернемо увагу на знак суми коренів.	$x_1 + x_2 = \frac{7}{5} > 0$
8.	Оскільки сума коренів додатна й корені мають один знак, то вони обидва додатні.	$\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$
9.	Запишемо відповідь.	Відповідь: $x_1 + x_2 = \frac{7}{5}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}$; обидва корені додатні.

Визначення знаків коренів рівняння слід починати з аналізу знака добутку:

- 1) якщо $x_1 \cdot x_2 > 0$, то корені мають один знак;
- 2) якщо $x_1 \cdot x_2 < 0$, то корені мають різні знаки.

СЛІД ЗНАТИ!



Вправа 3. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Оскільки знаки старшого коефіцієнта і вільного члена різні, то задане рівняння має корені.	$a = 1, c = -8, ac < 0$, тому $D > 0$.
2.	Визначимо знак добутку коренів рівняння.	$x_1 \cdot x_2 = -8 < 0$, тобто корені мають різні знаки.
3.	Підберемо всі можливі розклади на множники числа (-8) .	$-8 = -1 \cdot 8, -8 = -2 \cdot 4,$ $-8 = -4 \cdot 2, -8 = -8 \cdot 1.$
4.	Серед чотирьох отриманих варіантів вибираємо ту пару, яка задовольняє умову $x_1 + x_2 = -2$.	$x_1 = -4, x_2 = 2$ – такі числа, що $x_1 + x_2 = -2$.
5.	Запишемо відповідь.	Відповідь: $-4; 2$.