

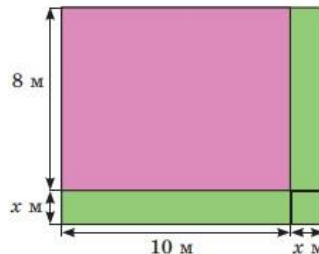


Головна ідея



АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Фермер виділив під баклажани ділянку прямокутної форми розмірами 8×10 м. Для захисту від шкідливих комах він висадив базилік уздовж двох сусідніх сторін ділянки, як показано на рис.1. Визначте ширину смуги, зайнятої базиліком, якщо загальна площа, зайнята базиліком і баклажанами, становить $87,36 \text{ м}^2$.



Розв'язання: Якщо позначити ширину смуги, яку виділено під базилік, через x м, то сторони прямокутника, що містить і баклажани, і базилік, дорівнюватимуть $(8+x)$ м і $(10+x)$ м. Оскільки загальна площа ділянки становить $87,36 \text{ м}^2$, складемо рівняння: $(8+x) \cdot (10+x) = 87,36$. Якщо в цьому рівнянні розкрити дужки, $87,36$ перенести в ліву частину з протилежним знаком і звести подібні доданки, то отримаємо рівняння $x^2 + 18x - 7,36 = 0$. Дивлячись на загальний вигляд даного рівняння, маємо повне квадратне рівняння. Виникає запитання: як розв'язуються квадратні рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$?

Спосіб виділення повного квадрата у лівій частині рівняння.



Вправа 1. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 4x - 12 = 0$ способом виділення повного квадрата.

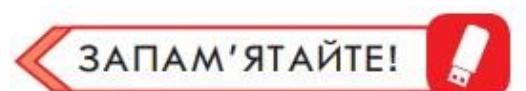
Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Виділимо квадрат суми у виразі $x^2+4x-12$, додавши до нього й віднявши від нього число $2^2=4$.	$x^2+4x-12=\underbrace{x^2+2\cdot 2\cdot x+4}_{\text{квадрат суми}}-4-12=0$
2.	Застосуємо до перших трьох доданків формулу квадрата суми й запишемо отримане рівняння.	$(x+2)^2-16=0$
3.	Розв'яжемо отримане рівняння за відомою схемою: якщо $x^2=m$, то $x=\pm\sqrt{m}$ при $m\geq 0$.	$(x+2)^2=16$ $x+2=\pm\sqrt{16}$ $x+2=\pm 4$
4.	Розв'яжемо кожне з отриманих рівнянь. Одержані розв'язки є шуканими.	$x+2=-4$ або $x+2=4$ $x_1=-6$ $x_2=2$
5.	Запишемо відповідь.	Відповідь: -6 ; 2 .

Розв'язування квадратного рівняння способом виділення квадрата двочлена містить громіздкі перетворення і не є зручним, особливо якщо другий коефіцієнт — непарне число. Тому було виведено формулу, за якою можна знайти корені квадратного рівняння. Виведення цієї формули для рівняння, записаного в загальному вигляді $ax^2 + bx + c=0$, базується саме на способі виділення квадрата двочлена (див. виведення формули у презентації).

Формула для обчислення коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c=0$, $a \neq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$



Кількість розв'язків квадратного рівняння $ax^2 + bx + c=0$ залежить від знака виразу $D = b^2 - 4ac$. Якщо $D > 0$, то значення кореня $\sqrt{D}$ існує і рівняння матиме два корені. Якщо $D < 0$, то значення арифметичного кореня не існує, тому

рівняння не матиме коренів. А ось у випадку, коли $D = 0$, корені рівняння будуть рівними. У цьому разі кажуть, що рівняння має один розв'язок, а саме $x = -\frac{b}{2a}$.

Якщо коефіцієнти a і c мають різні знаки,
то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ завжди має
корені.

СЛІД ЗНАТИ!



1. Якщо $D < 0$, то рівняння не має коренів.
2. Якщо $D = 0$, то рівняння має один корінь
 $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!



Отже, за знаком виразу D визначають кількість коренів квадратного рівняння. Позначення D для виразу $b^2 - 4ac$ є не випадковим, оскільки D — перша літера слова «discriminant», що в перекладі означає «той, що розрізняє». Сам вираз $D = b^2 - 4ac$ називають дискримінантом.

**Алгоритм розв'язування повного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$
($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)**

1. Визначіть коефіцієнти заданого квадратного рівняння.
2. Дискримінант рівняння обчисліть за формулою $D = b^2 - 4ac$.
3. Порівняйте дискримінант з нулем:
якщо $D < 0$, то рівняння не має коренів;
якщо $D = 0$, то рівняння має один корінь
 $x = -\frac{b}{2a}$;
якщо $D > 0$, то рівняння має два корені
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

АЛГОРИТМ





Вправа 2. Розв'яжіть рівняння $2x^2 - x - 3 = 0$.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння.	$a = 2, b = -1, c = -3$
2.	Обчислимо дискримінант рівняння за формулою $D = b^2 - 4ac$.	$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$
3.	Порівняємо дискримінант з нулем. $D > 0$, то рівняння має два корені $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.	$D = 25 > 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$ $x_1 = \frac{1-5}{4} = -1,$ $x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5.$
4.	Запишемо відповідь.	Відповідь: $-1; 1,5$.



Вправа 3. Розв'яжіть рівняння $5x^2 - 3x + 7 = 0$.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння.	$a = 5, b = -3, c = 7$
2.	Обчислимо дискримінант рівняння за формулою $D = b^2 - 4ac$.	$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 9 - 140 = -131$
3.	Порівняємо дискримінант з нулем. $D < 0$, то рівняння не має коренів.	$D = -131 < 0$ – коренів не має
4.	Запишемо відповідь.	Відповідь: не має коренів.



Вправа 4. Розв'яжіть рівняння $16x^2 - 24x + 9 = 0$.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння.	$a = 16, b = -24, c = 9$
2.	Обчислимо дискримінант рівняння за формулою $D = b^2 - 4ac$.	$D = (-24)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 576 - 576 = 0$
3.	Порівняємо дискримінант з нулем. $D = 0$, то рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$.	$D = 0$ $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-24}{2 \cdot 16} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 0,75$
4.	Запишемо відповідь.	Відповідь: 0,75.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) другий коефіцієнт — парне число, тобто $b = 2k$, то для визначення коренів цього рівняння можна використати спрощену формулу:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } k = \frac{b}{2}, D_1 = k^2 - ac.$$



Із доведенням поданої формули $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, де $k = \frac{b}{2}$, $D_1 = k^2 - ac$,

можна ознайомитися на сайті interactive.ranok.com.ua



Вправа 5. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Розв'язання:

Крок	Зміст дії	Результат дії
1.	Визначимо коефіцієнти рівняння.	$a = 3, b = -2, c = -1$
2.	Обчислимо дискримінант рівняння за формулою $D_1 = k^2 - ac$, де $k = \frac{b}{2}$.	$k = \frac{-2}{2} = -1$ $D_1 = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$
3.	Знайдемо корені рівняння за формулою $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$.	$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{3}$. $x_1 = \frac{1-2}{3} = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$
4.	Запишемо відповідь.	Відповідь: $-\frac{1}{3}, 1.$



В один клік

За допомогою пакетів прикладних програм ви можете знайти корені будь-яких квадратних рівнянь. Використаємо для цього програму Microsoft Excel, що входить до стандартного пакета Microsoft Office (див. презентацію до заняття).



Дізнатися, як за відомим коренем рівняння визначити його коефіцієнти, можна на сайті interactive.ranok.com.ua



Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, сміливіше входьте у воду. Хочете навчитися математики, беріться за завдання. Кожне розв'язання є своєрідним мистецтвом пошуку

Михайло Кравчук